Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho da 4ª Aula Prática

Teorema de Cauchy

1. Calcule $\int_\gamma f(z)\,dz$ para:

   (i) $f(z) = z^2$, $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [-\pi/2, \pi/2])$;

   (ii) $f(z) = \operatorname{Re} z$, $\gamma(t) = t + it^2$ $(t \in [0,1])$;

   (iii) $f(z) = 1/z$, $\gamma(t) = e^{-it}$ $(t \in [0, 8\pi])$;

   (iv) $f(z) = e^z$, γ os segmentos $[0,1] \cup [1, 1+i] \cup [1+i, i]$;

   (v) $f(z) = |z|^4$, γ o segmento $[-1+i, 1+i]$.

2. Seja $R > 0$. Mostre

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}\,d\theta = 1 \quad (0 \le r < R).$$

   Sugestão: Considere o integral da função $(R+z)/(z(R-z))$ sobre um caminho adequado.

3. Mostre que:

   (i) $\left|\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z}\,dz\right| \le 4\pi$;

   (ii) $\left|\oint_{|z|=R} \frac{z-1}{z+1}\,dz\right| \le 2\pi\frac{R(R+1)}{R-1}$;

   (iii) $\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^4}\,dz\right| \le \pi R^{-3}$, $\gamma(t) = Re^{it}$ $(t \in [0,\pi])$;

   (iv) $\left|\int_{[0,1+i]} (z^2+1)^{-1}\,dz\right| \le \sqrt{2}$.

4. Para $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, designa-se por $\gamma(a; r)$ o caminho $\gamma(t) = a + re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Calcule $\int_\gamma (1+z^2)^{-1}\,dz$ para:

   (i) $\gamma = \gamma(1;1)$;

   (ii) $\gamma = \gamma(i;1)$;

   (iii) $\gamma = \gamma(-i;1)$;

   (iv) $\gamma = \gamma(0;2)$;

   (v) $\gamma = \gamma(3i;\pi)$;