

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho da 6ª Aula Prática

1. Determine a ordem dos zeros de cada das funções seguintes:

$$(i) (z^4 - 1) \operatorname{sen} \pi z, \quad (ii) 1 - e^{z^2}, \quad (iii) 1 + e^{z^2}.$$

2. Determine a expansão em série de Laurent, de

(i) $(z^2 - 1)^{-2}$ válida em

a) $0 < |z - 1| < 2$,

b) $|z + 1| > 2$.

(ii) $\frac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi)^3}$, válida em $z \neq \pi$.

3. Dê duas expansões em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1 - z)},$$

e, para cada uma delas, indique a região onde é válida.

4. Determine e classifique as singularidades em \mathbb{C} das funções seguintes:

$$(i) \frac{z}{(z^2 - 1)}, \quad (ii) \frac{1}{z^3(z^2 + 1)}, \quad (iii) \frac{1}{1 + z^4}, \quad (iv) \frac{1}{1 - z + z^2},$$

$$(v) \frac{1}{(z^2 + z + 1)^3}, \quad (vi) \frac{z}{(z + 1)^2(z^2 - 3z + 2)}, \quad (vii) \frac{(z + 1) \sin(\frac{\pi z}{3})}{(z^2 - 1)^2(z - 3)}.$$

5. Utilize o Teorema dos resíduos para calcular:

$$(i) \oint_{|z|=2} \frac{z}{(z^2 - 1)} dz, \quad (ii) \oint_{|z-3|=1} \frac{1}{z(3 - z)} dz, \quad (iii) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z - 1}{z(1 + z)} dz,$$

$$(iv) \oint_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z(1 + z)} dz, \quad (v) \oint_{|z|=1} \left(\frac{z^2 + 1}{z}\right) e^{\frac{1}{z}} dz$$