Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUACÕES DIFERENCIAIS

TESTE 2 - 15 DE DEZEMBRO DE 2007 - DAS 9H ¿S 10:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o problema de valor inicial
$$\frac{dy}{dt} + e^y \cos(t) = 0, \quad y(0) = 0.$$

[1 val.] (a) Explicite a solução.

RES: A equação é separável visto poder ser escrita na forma:
$$e^{-y}y' = -\cos t,$$
ou seja
$$\frac{d}{dt}(e^{-y(t)}) = \cos t.$$
Integrando entre 0 e t,
$$\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{-y(s)})ds = \int_0^t \cos s \, ds,$$
donde
$$e^{-y(t)} = \operatorname{sen} t + 1,$$
e
$$y(t) = -\log(\operatorname{sen} t + 1).$$

[1 val.] (b) Indique o intervalo máximo de definição da solução.

RES: O intervalo máximo de definição será $]-\pi/2, 3\pi/2[$, uma vez que em $t = -\pi/2$ ou $t = 3\pi/2$ a solução "explode"($\lim y(t) = +\infty$ quando $t \to -\pi/2$ e $t \to 3\pi/2$)

2. Considere a equação diferencial
$$2xy + (y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

[1 val.] (a) Verifique que a equação tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

RES: Se a equação tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$, então
$$\mu(y)[2xy + (y^2 - x^2)\frac{dy}{dx}] = 0$$
é uma equação exacta. Sendo assim,
$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(y)2xy] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(y)(y^2 - x^2)],$$
donde
$$\mu'(y) = -\frac{2}{y}\mu(y).$$
Esta é uma equação de 1^{a} ordem, linear e homogénea que tem como solução $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$.

(b) Explicite a solução que verifica $y(0) = 2$ e determine o seu intervalo máximo de definição. [1

RES: Existe então $\phi(x, y)$ de classe C^1 tal que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{2xy}{y^2},$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{y^2},$$

e atendendo ao teorema da função implícita e ao facto de $\frac{y^2-x^2}{y^2} \neq 0$ para $x = 0, y = 2$, a solução é dada implícitamente numa vizinhança de $(0, 2)$ por:

$$\phi(x, y) = \phi(0, 2).$$

De $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{2xy}{y^2}$ resulta que

$$\phi(x, y) = \frac{x^2}{y} + h(y)$$

e de $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{y^2}$ resulta que

$$\phi(x, y) = \frac{x^2}{y} + y = \phi(0, 2) = 2.$$

Explicitando esta equação (adicionando 1 a ambos os lados da igualdade) temos que $y^2 - 2y + 1 = 1 - x^2$. Tendo em conta que $y(0) = 2$, obtemos então:

$$y = \sqrt{1 - x^2} + 1,$$

e o intervalo máximo de definição é $]-1, 1[$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a solução geral da equação $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. [2

RES
As raízes do polinómio caracteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, são:

$$\lambda = -1,$$

(raíz dupla), e

$$\lambda = 5$$

(raíz simples)
Os espaços proprios $E(\lambda)$ correspondentes são determinados resolvendo $(A-(-1)I)v = 0$, e $(A - 5I)v = 0$, obtendo-se:

$$E(5) = \mathcal{L}\left\{(-\frac{1}{6}, 1, 1)^T\right\}$$

e

$$E(-1) = \mathcal{L}\left\{(1, 0, 0)^T\right\}$$

Uma vez que só temos um vector proprio associado ao valor próprio $\lambda = -1$, necessitamos de obter um vector próprio generalizado, o qual será solução de:

$$(A+I)v = (1,0,0,)^T.$$

Uma solução é $(1,-1,5)^T$ e portanto a solução geral da equação é:

$$x(t) = C_1 e^{-t}(1,0,0,)^T + C_2 e^{-t}(1+t,-1,5)^T + C_3 e^{5t}(-\frac{1}{6},1,1)^T.$$

[1 val.] (b) Seja $\mathbf{h}(t) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$. Determine a solução geral da equação $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$.

RES

A solução geral da equação não-homogénea será da forma

$$x(t) = x_h(t) + X(t)(C_1(t), C_2(t), C_3(t))^T,$$

onde $x_h(t)$ é a solução geral da equação homogénea calculada na alínea anterior, $X(t)$ uma matriz solução fundamental (matriz fundamental de soluções, cujas colunas são soluções linearmente independentes da eq. homogénea),e os coeficientes $C_i, i = 1,2,3$ (agora dependentes de t) são determinados por:

$$(C_1(t), C_2(t), C_3(t))^T = \int X^{-1}(t)(1,0,0)^T\, dt.$$

Da alínea anterior vem

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & (1+t)e^{-t} & -\frac{1}{6}e^{5t} \\ 0 & -e^{-t} & e^{5t} \\ 0 & 5e^{-t} & e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Tendo em conta a forma do termo não homogéneo (só a primeira entrada não-nula), é fácil ver que necessitamos apenas de calcular a primeira coluna da matriz $X^{-1}(t)$. Esta coluna é dada por $(e^t,0,0)^T$. Como $\int e^t\, dt = e^t$ então uma solução particular da equação não homogénea é

$$x_p(t) = X(t)(e^T,0,0)^T = (1,0,0)^T.$$

A solução geral da equação não -homogénea é a soma da solução geral da equação homogénea com x_p, ou seja

$$x(t) = C_1 e^{-t}(1,0,0,)^T + C_2 e^{-t}(1+t,-1,5)^T + C_3 e^{5t}(-\frac{1}{6},1,1)^T + (1,0,0)^T.$$

[1 val.] 4. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + y = te^t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

RES

Solução da equaçao homogénea:

O polinómio característico é

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda - 1)^2 = 0,$$

pelo que o operador diferencial pode ser factorizado na forma:

$$(\frac{d}{dt} - 1)^2 = 0,$$

e consequentemente a solução geral da equação homogénea é

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 te^t.$$

O termo não homogéneo é ele próprio solução de uma equação homogénea, uma vez que $(\frac{d}{dt}-1)^2(te^t)=0$. Então, pelo método dos coeficientes indeterminados, a solução particular da eq. não-homogénea y_P deverá satisfazer:

$$(\frac{d}{dt}-1)^4 z = 0,$$

ou seja, deverá ser da forma:

$$z(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + c_4t^3e^t.$$

Como $(\frac{d}{dt}-1)^2)y_P = te^t$, vamos determinar os coeficientes de $z(t)$ acima por forma a satisfazer esta igualdade. É claro que c_1 e c_2 permanecerão indeterminados uma vez que aplicando o operador diferencial aos termos correspondentes obtemos zero.

Os coeficientes c_3 e c_4 são determinados fazendo então

$$\left(\frac{d}{dt}-1\right)^2 (c_3t^2e^t + c_4t^3e^t) = te^t.$$

Efectuando os cálculos chegamos a $c_3 = 0, c_4 = \frac{1}{6}$.

Portanto, a solução geral da equação não homogénea é:

$$y(t) = y_H + y_P = c_1e^t + c_2te^t + \frac{1}{6}t^3e^t.$$

As condiçoes iniciais determinam como se vê fácilmente que: $c_1 = 1, c_2 = 0$. Ou seja a solução é: $y(t) = e^t + \frac{1}{6}t^3e^t$.

5. Considere o seguinte problema de valores de fronteira

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u(x,t), & 0<x<1, t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t>0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cosenos de f no intervalo $[0,1]$ e indique os valores para que converge a série. [1

A série de Fourier dos cosenos de f em $[0,1]$ é:

$$SCf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x,$$

onde

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x) = 2[\int_0^{\frac{1}{2}} -\cos(n\pi x) + \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos n\pi x)].$$

Ou seja,

$$a_0 = 0,$$

e

$$a_n = 2[\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi}|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi}|_{\frac{\pi}{2}}^{1}],\ n \ge 1$$

Obtemos então (atendendo a que $\operatorname{sen} n\pi = 2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}$)

$$a_n = \frac{4}{n\pi}(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}(\cos\frac{n\pi}{2} - 1)),$$

e

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{-4}{n\pi} & n = 1, 5, 9 \ldots 4k-3 \\ \frac{4}{n\pi} & n = 3, 7, 11, \ldots 4k-1 \end{cases}$$

A série dos cosenos de f é então dada por:

$$SCf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x),$$

para os valores dos coeficientes a_n indicados acima.
Atendendo a que f é seccionalmente monótona, a série calculada converge para f em todos os pontos onde f é contínua, ou seja para $x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[$, e para zero (média dos limites laterais) em $x = \frac{1}{2}$. Igualmente temos que em $x = 0$ e $x = 1$ a série converge para $f(x)$ (média dos valores do prolongamento de f a $\mathbb{R}$ como função par, nos extremos do intervalo).

[1 val.] (b) Resolva o problema (1).

RES Por separação de variáveis vamos obter soluçoes linearmente independentes da equação e condiçoes de fronteira homogéneas, da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Da equação e conds. de fronteira resulta então:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + X(x)T(t), \quad X'(0) = X'(1) = 0.$$

Separando numa equação para X e outra para T, temos que

$$\frac{X''}{X}(x) = \frac{T' - T}{T}(t) = -c,$$

onde cé uma constante arbitrária.
Comecemos por resolver:

$$X'' + cX = 0,\ X'(0) = X'(1) = 0.$$

A solução geral é $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-c}x} + c_2 e^{-\sqrt{-c}x}$ (para $c \neq 0$). Para $c = 0$, a solução é da forma $X(x) = Ax + B$ e das condições de fronteira concluímos que $A = 0$, o seja a solução é constante.
As condiçoes de fronteira no caso em que $c \neq 0$ levam a:

$$c_1 = c_2 (X'(0) = 0),$$

e

$$e^{\sqrt{-c}} = e^{-\sqrt{-c}},$$

o seja, $\sqrt{-c} = n\pi i$.
Coclu´mos portanto que temos soluções (linearmente independentes) da forma:

$$X_n(x) = \cos n\pi x, n = 0, 1, \ldots n$$

Para $c = n^2\pi^2$, a equação para T fica:

$$T' + (n^2\pi^2 + 1)T = 0,$$

que tem como soluções linearmente independentes,

$$T_n(t) = e^{-(n^2\pi^2+1)t},\ t \geq 0.$$

Vamos então considerar

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{(-n^2\pi^2+1)t} \cos n\pi x, \tag{2}$$

como solução formal do problema (eq. mais condiçoes de fronteira homoéneas) e determinar os coeficientes c_n por forma a verificar a condição inicial.
Naturalmente que necessitamos da expansão de f em série de Fourier dos cosenos no intervalo $]0,1[$, mas esse desenvolvimento foi determinado na alínea anterior.
Temos então que a solução é da forma (2) com os coeficientes c_n dados por:

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \\ 0 & n \text{ par} \\ c_n = a_n e^{n^2\pi^2+1} & n \text{ impar} \end{cases}$$

onde a_n são os coeficientes determinados a alínea anterior.