Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 1B - 19 DE ABRIL DE 2008 - DAS 11H ÀS 12:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

[1 val.] 1. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $\operatorname{Im} f(z) = 4$. Será f uma função constante? Justifique.

2. Considere a função $f(z) = z^2 + \operatorname{sen} z$.

[1 val.] (a) Calcule $\oint_{|z+i|=2} f(z)dz$.

[1 val.] (b) Calcule $\int_\gamma f(z)\, dz$, em que $\gamma(t) = \pi - \pi e^{it}$, e $0 \le t \le \pi$.

3. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z-1)} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$.

[1 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidade de f.

[1 val.] (b) Determine a série de Laurent de f na região $0 < |z-1| < 1$.

[1 val.] (c) Calcule

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z)\, dz. \qquad \text{e} \qquad \oint_{|z|=2} f(z)\, dz$$

onde no primeiro integral, a curva é percorrida no sentido positivo e no segundo integral a curva é percorrida no sentido negativo.

4. Seja γ_R a curva fechada que limita a região

$$\Omega_R = \left\{ z = \rho e^{i\theta} \mid 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}, \qquad \text{em que } R > 1,$$

percorrida no sentido positivo.

[1 val.] (a) Calcule o integral

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4}.$$

[2 val.] (b) Calcule o integral real

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}.$$

[1 val.] 5. Mostre que a série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ define uma função analítica na região $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$. (Recorde que se define $n^z = e^{z \log n}$ em que $\log n$ designa o logaritmo de base natural de um número real.)