ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 2A- 7 DE JUNHO DE 2008 - DAS 11H ÀS 12:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Determine a solução do problema de valor inicial indicando o intervalo máximo de definição.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos t}{2+2y}, \qquad y(0) = 0.$$

Trata-se de uma equação separável que, para $y \neq -1$ pode ser escrita na forma

$$(2+2y)\frac{dy}{dt} = \cos t\,.$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(2y+y^2) = \cos t\,.$$

Integrando entre 0 e t

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(2y+y^2)\,ds = \int_0^t \cos s\,ds$$

e usando a condição inicial $y(0)=0$, resulta a seguinte forma implícita para a solução:

$$2y+y^2 = \operatorname{sen} t\,.$$

Resolvendo para y, obtem-se a solução na forma explícita:

$$y^2+2y-\operatorname{sen} t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = -1 \pm \sqrt{1+\operatorname{sen} t},$$

Levando mais uma vez em consideração que $y(0)=0$, resulta

$$y(t) = -1+\sqrt{1+\operatorname{sen} t}\,.$$

O intervalo máximo de definição da solução será $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, dado que, em $t=-\frac{\pi}{2}$ e $t=\frac{3\pi}{2}$, $y(t)$ não é diferenciável $\left(y'(-\frac{\pi}{2}^+) = +\infty \text{ e } y'(\frac{3\pi}{2}^-) = -\infty\right)$.

2. Determine a solução da equação seguinte que satisfaz $y(1)=2$.

$$2xy^3+3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

Definindo $M(x,y) = 2xy^3$ e $N(x,y) = 3x^2y^2$, podemos constatar que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2\,,$$

e, portanto, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Logo a equação diferencial é exacta e, portanto, existe $\Phi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M(x,y) = 2xy^3, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x,y) = 3x^2y^2.$$

Primitivando a primeira equação, obtemos $\Phi(x,y) = x^2y^3+h(y)$, e portanto $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 3x^2y^2 + h'(y)$. Comparando com a segunda equação, concluimos que $h'(y)=0$ e portanto, $h(y)=c$ (constante). Logo, $\Phi(x,y) = x^2y^3+c$ e a solução assume a forma implícita $x^2y^3 = C$ (constante). Usando a condição inicial, obtemos $C=8$ e a solução do problema de valor incial considerado será

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{8}{x^2}}.$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a solução geral da equação diferencial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Método 1:
Cálculo dos valores próprios: $\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(-4-\lambda) + 16 = \lambda^2$. Logo, a matriz tem o valor próprio duplo $\lambda = 0$. Cálculo de vectores próprios:

$$(A - 0I)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 4a - 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2a.$$

Logo, o espaço próprio associado a $\lambda = 0$ é gerado pelo vector $\mathbf{v_1} = (1,2)^T$ Por outro lado, como A^2 é a matriz nula, sabemos que qualquer vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$ é um vector próprio generalizado que satisfaz $(A - 0I)^2 = \mathbf{0}$. Escolhendo, em particular $\mathbf{v_2} = (0,1)^T$, que com $\mathbf{v_1}$ forma uma base de $\mathbb{R}^2$ obtemos as seguintes soluções para o sistema homogéneo:

$$\phi_1(t) = e^{At}\mathbf{v_1} = \mathbf{v_1} \qquad \text{e} \qquad \phi_2(t) = e^{At}\mathbf{v_2} = (I + tA)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2t \\ 1-4t \end{smallmatrix}\right).$$

Então, a solução geral da equação homogénea pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + c_2\left(\begin{smallmatrix} -2t \\ 1-4t \end{smallmatrix}\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Método 2:
Verificando que $A^2 = 0$ podemos concluir que $e^{At} = I + At = \left(\begin{smallmatrix} 1+4t & -2t \\ 8t & 1-4t \end{smallmatrix}\right)$ e, logo, a solução geral da equação homogénea pode ser escrita na forma

$$y(t) = e^{At}\left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right) = c_1\left(\begin{smallmatrix} 1+4t \\ 8t \end{smallmatrix}\right) + c_2\left(\begin{smallmatrix} -2t \\ 1-4t \end{smallmatrix}\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Determine a solução geral da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)$.

Método 1:
Se e^{At} não foi determinada em (a) mas apenas uma base de soluções da equação homogénea, podemos construir a matriz solução fundamental correspondente. Usando $\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$ calculado nesta resolução,

$$X(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2t \\ 2 & 1-4t \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{e portanto} \qquad X(t)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} * & 2t \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

o que nos permite calcular uma solução particular da equação não homogénea dada, recorrendo à fórmula da variação dos parâmetros:

$$y_P(t) = X(t)\int_0^t X(s)^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ s \end{smallmatrix}\right) ds = X(t)\begin{pmatrix} \int_0^t 2s^2\, ds \\ \int_0^t s\, ds \end{pmatrix} = X(t)\begin{pmatrix} \frac{2t^3}{3} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{t^3}{3} \\ \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} \end{pmatrix}$$

A solução geral pedida pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + c_2\left(\begin{smallmatrix} -2t \\ 1-4t \end{smallmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -\frac{t^3}{3} \\ \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Método 2:
Se já foi calculada e^{At} em (a), recorrendo igualmente à fórmula da variação dos parâmetros obtemos a solução particular

$$y_P(t) = e^{At}\int_0^t e^{-As}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ s \end{smallmatrix}\right) ds = e^{At}\int_0^t \left(\begin{smallmatrix} * & 2s \\ * & 1+4s \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ s \end{smallmatrix}\right) ds = e^{At}\begin{pmatrix} \int_0^t 2s^2\,ds \\ \int_0^t (s+4s^2)\,ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2t^3}{3} \\ \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} \end{pmatrix}$$

e a solução geral pedida pode ser dada como

$$y(t) = e^{At}\left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right) + e^{At}\int_0^t e^{-As}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ s \end{smallmatrix}\right) ds = c_1\left(\begin{smallmatrix} 1+4t \\ 8t \end{smallmatrix}\right) + c_2\left(\begin{smallmatrix} -2t \\ 1-4t \end{smallmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -\frac{t^3}{3} \\ \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = te^{-t}.$$

O polinómio característico da equação homogénea associada é $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = (\lambda+1)\lambda$, tendo as raizes simples 0 e -1. A solução geral da equação homogénea é então

$$y_H(t) = c_1 + c_2e^{-t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

A equação dada pode-se escrever na forma

$$p(D)y = (D+1)Dy = te^{-t}$$

e, como $(D+1)^2(te^{-t}) = 0$, por aplicação do operador $(D+1)^2$ a ambos os membros da equação diferencial dada obtemos a equação homogénea

$$(D+1)^3Dy = 0\,,$$

para a qual uma base de soluções é $\{1, e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}\}$. Sendo as duas primeiras soluções da equação homogénea, vamos calcular uma solução particular da não homogénea na forma

$$y_P(t) = (at + bt^2)e^{-t}$$

Como, $y_P'(t) = (a + (2b-a)t - bt^2)e^{-t}$ e $y_P''(t) = ((2b-2a) + (-4b+a)t + bt^2)e^{-t}$, obtemos

$$y_P'' + y_P' = te^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad 2b - a - 2bt = t.$$

A segunda identidade verifica-se para todo t sse $-a + 2b = 0$ e $-2b = 1$ ou seja se $a = -1$ e $b = -\frac{1}{2}$. Concluimos que a solução geral pedida pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1 + c_2e^{-t} - \left(t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

5. Considere o problema de Dirichlet

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \qquad u(t,0) = 0, \qquad u(t,1) = 0$$
$$t > 0, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0,x) = x.$$

(a) Determine a série de senos de $u(0,x)$.

A série de senos de $u(0,x) = x$ em $[0,1]$ é a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x,$$

onde

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x \operatorname{sen} n\pi x\, dx = 2\Big(\Big[-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\, dx\Big)$$
$$= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

A série dos senos de $u(0,x) = x$ é então dada por:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi x.$$

cuja soma é igual a x em $[0,1[$ e a 0 em $x = 1$.

(b) Resolva o problema.

Por separação de variáveis vamos obter soluções linearmente independentes da equação diferencial satisfazendo condições de fronteira homogéneas da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Da equação e condições de fronteira resulta então:

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = X(x)T(t), \quad X(0) = X(1) = 0.$$

Separando numa equação para X e outra para T, temos que

$$\frac{X''}{X}(x) = \frac{T' - T}{T}(t) = c,$$

onde c é uma constante arbitrária (para já). Começemos por resolver

$$X'' - cX = 0, \; X(0) = X(1) = 0.$$

Para $c > 0$ a solução geral real é $X(x) = ae^{\sqrt{c}x} + be^{-\sqrt{c}x}$ e as condições em $x = 0, 1$ equivalem a $b = -a$ e $a(e^{\sqrt{c}} + e^{-\sqrt{c}}) = 0$, o que implica a $a = b = 0$.
Para $c = 0$, a solução geral é da forma $X(x) = a + bx$, e as condições em $x = 0, 1$ implicam $a = b = 0$.
Para $c < 0$, a solução geral real é $X(x) = a\cos\sqrt{-c}x + b\operatorname{sen}\sqrt{-c}x$. A condição $X(0) = 0$ implica $a = 0$. Usando este resultado com a condição $X(1) = 0$, concluimos que apenas existem soluções não triviais nos casos em que $\sqrt{-c} = n\pi$, ou seja, $c = -n^2\pi^2$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. e obtemos assim, para funções $X(x)$ as funções:

$$X_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x \qquad \text{para} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para $c = -n^2\pi^2$, a equação para T fica:

$$T' + (n^2\pi^2 + 1)T = 0,$$

que tem como soluções:

$$T_n(t) = e^{-(n^2\pi^2+1)t}, \; t \geq 0$$

Então, $X_n(x)T_n(t)$ são soluções linearmente independentes da equação diferencial e condições de fronteira. Vamos então considerar a solução formal do problema como uma combinação linear infinita destas soluções:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(-n^2\pi^2+1)t} \operatorname{sen} n\pi x.$$

Os coeficientes b_n são determinados pela condição inicial imposta. Assim, como $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x$ e a condição inicial é $u(x,0) = x$, para $x \in (0,1)$, concluimos que estes coeficientes são exactamente os da série de senos da função x em $(0,1)$ determinados em (a).

6. Determine a solução de

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} - 2y = 0,$$

que satisfaz $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Sug: Considere funções definidas por séries de potências.

Seguindo a sugestão, vamos procurar a solução $y(t)$ na forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n .$$

Como uma série de potências pode ser derivada termo a termo no interior do seu intervalo de convergência, e dado que

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} \quad \text{e} \quad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-2},$$

substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2} - 2t\sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

Reindexando a primeira série, e fazendo as operações óbvias, resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2}(n+2)(n+1) - 2c_n n - 2c_n)t^n = 0,$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2}(n+2) - 2c_n)(n+1)t^n = 0,$$

o que, por sua vez, é equivalente ao sistema (infinito) de equações

$$c_{n+2} = \frac{2c_n}{n+2}, \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Mas, $c_0 = y(0) = 1$ e $c_1 = y'(0) = 0$. Logo de imediato podemos dizer que para todo o n ímpar $c_n = 0$. Por outro lado, para n par, escrevendo $n + 2 = 2k$, para $n = 0, 2, 4, \dots$,

$$c_{2k} = c_{n+2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdots \frac{2}{2k} c_0 = \frac{1}{k!}, \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

sendo o resultado igualmente válido para $k = 0$. Logo,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = e^{t^2}.$$