Análise Matemática I

Exame modelo

Campus de Lisboa **Janeiro de 2001**

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores

Pistas sobre a solução do exame modelo[1]

I. 1. $\lim_{n\in\mathbb{N},n\to+\infty} \operatorname{sen}(n\pi/2)n\operatorname{sen}(1/n)$ não existe. Considere subsucessões correspondentes a índices pares e a índices que são divisíveis por 4 com resto 1. A primeira é constante e com limite 0, a segunda tem limite 1 pois $n\operatorname{sen}(1/n) = \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} \to 1$.

$\lim_{n\in\mathbb{N},n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$. pode calcular-se usando $\lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = 0$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n}$ é convergente pois $\lim \sqrt[n]{n^2 e^{-n}} = 1/e < 1$.

$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\log(n+1)} - \frac{1}{\log n}\right)$ é uma série de Mengoli convergente com soma facilmente calculável.

3. Escolha b de maneira a assegurar continuidade e depois a para assegurar que a derivada à direita de 0 é igual à derivada à esquerda de 0.

4. Note que o argumento do log tem que ser positivo e $\sqrt{2}$ é irracional.

II. 1. Nada particularmente digno de nota... Estude a função da maneira usual. Não é necessário calcular segundas derivadas para obter os resultados pretendidos.

2. Basicamente regra de Cauchy. Na alínea c) de notar que fazendo $y = 1/x$ e considerando $y \to 0$ se simplifica um pouco o limite. Na alinea b) pode usar-se o desenvolvimento em série de potências do sen em vez de usar várias vezes a regra de Cauchy.

3. O polinómio pedido pedido só pode ser o polinómio de MacLaurin de 2º grau da função $e^x \log(x+1)$.

---

[1] Este texto não pretende ser uma solução mas simplesmente dar algumas indicações que permitam verficar uma tentativa de resolução. Consultá-lo *antes* de resolver o exame modelo é uma péssima ideia.

4. O desenvolvimento de MacLaurin de e^x e $\log(x+1)$ são conhecidos (o segundo pode ser rededuzido a partir da série geométrica com facilidade). Use $e^x = ee^{x-1}$ e $\log x = \log(1+(x-1))$. A convergência ocorre para $|x-1| < 1$ e num dos extremos do intervalo de convergência.

III. a) Use $H(x) - Q_2(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ e o teorema de Weierstrass...

b) Decorre dos limites referidos atrás e de $\alpha > a$.

c) Existe um ponto de acumulação dos zeros de $H - Q_1$. Pode escolher-se uma sucessão monótona de zeros convergindo para esse ponto de acumulação. Aplique o teorema de Lagrange entre dois termos consecutivos dessa sucessão para construir uma sucessão de zeros da derivada de $H - Q_1$ que converge para o mesmo ponto. Aplicando o mesmo procedimento a esta última sucessão obtém-se uma sucessão de zeros da segunda derivada de $H - Q_1$ convergindo ainda para o mesmo ponto e este processo pode repetir-se indefinidamente. A partir da 3ª ordem a derivada de Q_1 é nula. Nesse ponto, por continuidade das derivadas todas são nulas.

d) Mostre que existe um ponto, entre todos os pontos de acumulação obtíveis na alíne anterior, tal que qualquer que seja a sua vizinhança aí $H - Q_1$ não é identicamente nulo. A série de Taylor tem todos os termos nulos nesse ponto.