# Análise Matemática IV
# Esboço de resolução do 1º Teste

6 de Maio de 2000

Engenharia Electrotécnica (excepto Telecomunicações) e
Engenharia de Gestão Industrial

1. (a) Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é da forma

$$f(x+iy) = \varphi(x^2-y^2) + i\psi(xy), \qquad \text{com } x, y \in \mathbb{R},$$

em que $\varphi$ e $\psi$ são funções reais de variável real diferenciáveis. Mostre que se $f$ é holomorfa $\varphi$ e $\psi$ devem ter derivadas constantes e aproveite para determinar todos os possíveis $f$.

**Esboço de resolução.** As equações de Cauchy-Riemann para uma tal função $f$ reduzem-se ao sistema

$$\begin{cases} 2x\varphi'(x^2-y^2) = x\psi'(xy), \\ -2y\varphi'(x^2-y^2) = -y\psi'(xy). \end{cases}$$

Considerando pontos sobre a recta definida por $y = x$ as equações conduzem a $2\varphi'(0) = \psi'(x^2)$ se $x \neq 0$. Como $x$ na igualdade anterior é um qualquer número não nulo concluimos que a derivada de $\psi$ tem que ser constante (e igual a $2\varphi'(0)$) quando o seu argumento é positivo. De forma análoga considerando $y = -x$ chega-se à conclusão que a derivada de $\psi$ tem de ser constante quando o seu argumento é negativo. Uma tal função tem de ter derivada constante por toda a parte (caso contrário não é diferenciável na origem). O mesmo argumento usando as rectas $y = 0$ e $x = 0$ conduz à conclusão que a derivada de $\varphi$ é constante.

Assim $\varphi$ e $\psi$ correspondem a produtos por números reais. Designemo-los por $\alpha$ e $\beta$ respectivamente. As condições de Cauchy-Riemann reduzem-se agora a

$$\begin{cases} 2x\alpha = x\beta, \\ -2y\alpha = y\beta. \end{cases}$$

pelo que devemos ter $\beta = 2\alpha$. Assim $f(z) = \alpha(x^2-y^2) + i2\alpha xy = \alpha z^2$ com $z = x+iy$.

(b) Seja $R > 0$. Considere o integral

$$I(R) \equiv \oint_{L_R} \frac{e^z}{z^3+1}\, dz$$

em que $L_R$ designa a linha definida pelo caminho

$$z(t) = \begin{cases} Re^{-t/\pi + it}, & \text{para } t \in [0, 2\pi], \\ R[(t-2\pi)(1-e^{-2}) + e^{-2}], & \text{para } t \in [2\pi, 2\pi+1]. \end{cases}$$

Determine $I(R)$ nos casos em que as singularidades da função integranda não se encontram sobre $L_R$.

**Esboço de resolução.** A linha $L_R$ é formada por um "arco de espiral" e um segmento de recta. Um esboço da linha, para um certo valor de $R$, aparece na figura 1. O efeito do parâmetro $R$ é ampliar (ou reduzir) a linha $L_1$ através de uma homotetia de razão $R$. Como a função integranda tem singularidades nas três raízes cúbicas de $-1$, que são $-1$, $e^{i\pi/3}$ e $e^{i5\pi/3}$, temos de investigar para que valores de $R$ os pontos de $L_R$ com argumentos $\pi/3$, $\pi$ e $5\pi/3$ têm módulo 1. Isto ocorre respectivamente se $Re^{-1/3} = 1$, $Re^{-1} = 1$ e $Re^{-5/3} = 1$. Portanto:

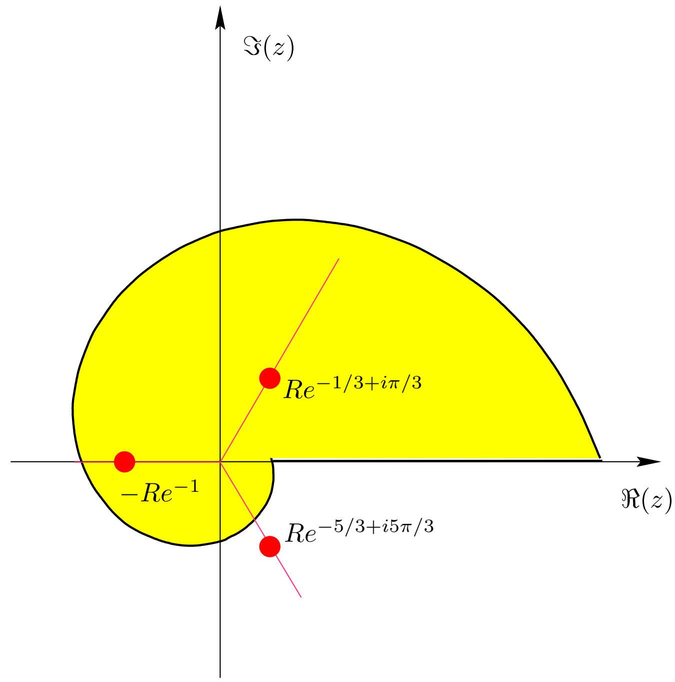


Figura 1: Um esboço da região limitada por $L_R$. As singularidades da função deverão estar sobre as semi-rectas sugeridas pelos segmentos a vermelho. Ilustra-se uma possível posição das singularidades com os 3 círculos vermelhos.

- Se $R > e^{5/3}$ todas as singularidades estão na região limitada por $L_R$;
- Se $e^{5/3} > R > e$ então $-1$ e $e^{i\pi/3}$ estão na região limitada por $L_R$;
- Se $e > R > e^{1/3}$ então $-1$ está na região limitada por $L_R$;
- Se $R < e^{1/3}$ então não há singularidades na região limitada por $L_R$.

Como a exponencial não se anula é fácil verificar que cada uma das singularidades é um pólo de primeira ordem. Os resíduos $c_1$, $c_2$ e $c_3$, repectivamente em $e^{i\pi/3}$, $-1$ e $e^{i5\pi/3}$, da função integranda são

$$c_1 = \frac{e^{e^{i\pi/3}}}{(e^{i\pi/3}+1)(e^{i\pi/3}-e^{5i\pi/3})}$$
$$c_2 = \frac{e^{-1}}{(-1-e^{i\pi/3})(-1-e^{5i\pi/3})}$$
$$c_2 = \frac{e^{e^{5i\pi/3}}}{(e^{5i\pi/3}-e^{i\pi/3})(e^{5i\pi/3}+1)}$$

Assim

- Se $R > e^{5/3}$ o integral iguala $2\pi i(c_1+c_2+c_3)$;
- Se $e^{5/3} > R > e$ o integral iguala $2\pi i(c_1+c_2)$;
- Se $e > R > e^{1/3}$ o integral iguala $2\pi i c_1$;
- Se $0 < R < e^{1/3}$ o integral é 0.

(c) Seja $\rho > 0$. Considere as linhas fechadas que se obtêm percorrendo o segmento de recta unindo $-i\rho$ a $i\rho$ e uma das semi-circunferências centradas em 0 e raio $\rho$ contidas em cada um dos semiplanos $\Re(z) \geq 0$ e $\Re(z) \leq 0$. Designe essas linhas, percorridas "uma vez no sentido directo", por $C_\rho^+$ e $C_\rho^-$. Para $\rho > 1$ calcule

$$\oint_{C_\rho^+} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\, dz \qquad \text{e} \qquad \oint_{C_\rho^-} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\, dz$$

e utilize um desses cálculos para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{(y^2+1)^2}\, dy.$$

**Esboço de resolução.** As linhas $C_\rho^+$ e $C_\rho^-$ estão esquematizadas na figura 2. Usando

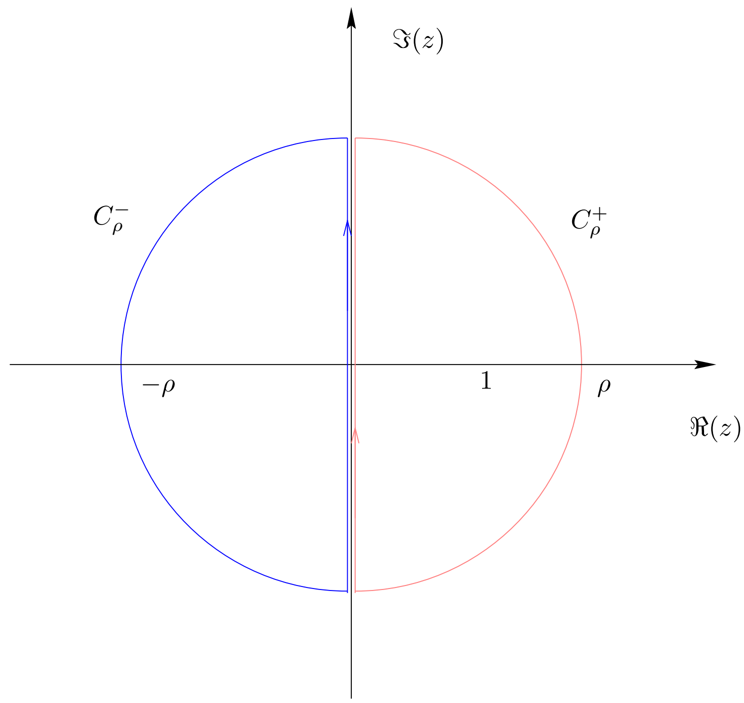


Figura 2: As linhas $C_\rho^+$ e $C_\rho^-$.

o teorema dos resíduos obtemos

$$\oint_{C_\rho^+} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\, dz = -2\pi i \left( \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z}{(z+1)^2} \right) \right) \bigg|_{z=1} = 0,$$
$$\oint_{C_\rho^-} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\, dz = 2\pi i \left( \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z}{(z-1)^2} \right) \right) \bigg|_{z=-1} = \pi i.$$

Como a exponencial é limitada no semiplano esquerdo ($|e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| \leq 1$ se $x \leq 0$) podemos usar o segundo (mas não o primeiro) destes integrais para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{(y^2+1)^2}\, dy = \lim_{\rho\to+\infty} \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{\cos y}{(y^2+1)^2}\, dy == \frac{1}{i} \lim_{\rho\to+\infty} \int_{L_\rho} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\, dz$$
$$= \frac{1}{i} \left( \pi i - \lim_{\rho\to+\infty} \int_{S_\rho} \frac{e^z}{(z^2-1)^2}\, dz \right) = \pi$$

em que $S_\rho^-$ designa a semicircunferência e $L_\rho^-$ o segmento de recta que formam $C_\rho^-$. O facto do limite quando $\rho \to +\infty$ do integral sobre $S_\rho$ ser 0 decorre da função integranda ser majorável no semi-plano esquerdo[1] por $\frac{1}{\rho^2-1}$ e $S_\rho$ ter comprimento $\pi\rho$.

(d) Decida se existe ou não uma função holomorfa $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ com uma singularidade essencial em 0 e tal que

$$\oint_\gamma z^j h(z)\, dz = \begin{cases} 0, & \text{se } j < -1, \\ \frac{2\pi i}{(j+1)!} & \text{se } j \geq -1. \end{cases}$$

em que $j \in \mathbb{Z}$ e $\gamma$ é uma qualquer circunferência centrada em 0 percorrida "uma vez no sentido directo".

**Esboço de resolução.** Admitindo que tal função existe o respectivo desenvolvimento em série de Laurent seria da forma

$$h(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k.$$

Admitindo temporariamente que podemos permutar a série com o integral teríamos

$$\oint_\gamma z^j h(z)\, dz = \oint_\gamma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^{j+k}\, dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \oint_\gamma c_k z^{j+k}\, dz = 2\pi i c_{-1-j}.$$

Daí que o candidato a função $h$ deverá satisfazer

$$c_{-j-1} = \begin{cases} 0, & \text{se } j < -1 \\ \frac{1}{(j+1)!}, & \text{se } j \geq -1 \end{cases}$$

ou seja

$$h(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots = e^{1/z}.$$

Esta função de facto satisfaz todas as propriedades desejadas[2].

2. Considere uma equação diferencial da forma $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$.

(a) Determine em que circunstâncias uma tal equação diferencial possui um factor integrante só dependente do produto $xy$.

(b) Aproveite o resultado anterior para determinar uma solução de

$$\begin{cases} y - \frac{y^2}{x} + (x + y)y' = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

**Esboço de resolução.** Um tal factor integrante pode escrever-se na forma $\mu(xy)$ para uma função $\mu$. Então o facto de multiplicando ambos os membros da equação por este factor a transformar em exacta garante que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(xy)M(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(xy)N(x, y)\right)$$

Expandindo as derivadas parciais obtém-se da igualdade anterior

$$x\mu'(xy)M(x, y) + \mu(xy)\frac{\partial M}{\partial y} = y\mu'(xy)N(x, y) + \mu(xy)\frac{\partial N}{\partial x}$$

[1] O raciocínio análogo não pode ser efectuado com $C_\rho^+$ devido à exponencial não ser limitada no semiplano direito.

[2] *A priori* não poderíamos afirmar que a série de Laurent que obtemos formalmente fosse válida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

pelo que

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM(x,y) - yN(x,y)}.$$

Daí que o segundo membro deverá ser uma função de $xy$. Se a designarmos por $\phi(xy)$ e escrevendo $w = xy$ poderemos obter $\mu$ resolvendo a equação diferencial ordinária de primeira ordem $\mu'(w) = \mu(w)\phi(w)$.

No exemplo da alínea (b) temos

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{yN(x,y) - xM(x,y)} = \frac{1 - 1 + 2y/x}{x(y - y^2/x) - y(x+y)} = \frac{2y/x}{-2y^2} = -\frac{1}{xy}.$$

pelo que $\mu$ se pode-se obter de $\mu'(w) = -\mu(w)/w$. Um tal $\mu$ é $\mu(w) = 1/w$ e podemos usar $1/xy$ como factor integrante.

Então a equação diferencial

$$\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) y' = 0$$

é exacta e equivalente à dada numa vizinhança de $(1,1)$. Para a resolver consideramos a determinação de um potencial $P$ para um campo cujas componentes sejam $M$ e $N$ numa vizinhança de $(1,1)$. Este deverá satisfazer

$$P(x,y) = \int \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\, dx + g_1(y) = \log x + \frac{y}{x} + g_1(y),$$
$$P(x,y) = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\, dy + g_2(x) = \log y + \frac{y}{x} + g_2(x).$$

para algumas funções $g_1$ e $g_2$. Comparando as duas expressões obtemos potenciais da forma $P(x,y) = \log(xy) + \frac{y}{x} + C$ para alguma constante $C$. Daí termos obtido soluções da equação diferencial definidas implicitamente por

$$\log(xy) + \frac{y}{x} = C.$$

Para verificarmos a condição inicial introduzimos nesta expressão $y = 1$ e $x = 1$ para obtermos uma solução particular definida por $\log(xy) + \frac{y}{x} = 1$.