Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Solução do exercício teste da semana de

13 de Março de 2000

Exercício.

1. Decida se cada um dos seguintes problemas tem uma solução única ou não. Quando optar pela afirmativa determine tal solução, quando optar pela negativa dê exmplo de duas soluções distintas.

   (a)
   $$\begin{cases} y' = e^x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (c)
   $$\begin{cases} y' = y \cos x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (d)
   $$\begin{cases} y' - e^x y = \cos x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (e)
   $$\begin{cases} y' = y^{1/3} \cos x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Considere a equação diferencial
   $$y' = (y^2 + 1)(1 + x^2 y^2).$$
   Mostre que esta equação não possui soluções definidas em $[0, +\infty[$. Justifique existência e unicidade de solução do problema de Cauchy.

Esboço de resolução.

1. Todas as equações pode-se pôr na forma $y' = f(x,y)$ com f uma função de classe C^1 excepto na alínea (e) tal garante que as soluções calculadas nas alíneas (a-d) são únicas. A alínea (a) resolve-se por primitivação imediata, as alíneas (b,c,e) por separação de variáveis e a alínea corresponde à resolução de uma equação linear de 1^{a} ordem.

   (a) $y(x) = e^x$.

   (b) A equação é equivalente a $\frac{d}{dx}(\log y(x)) = 1$ donde primitivando ambos os membros e tendo em conta a condição inicial $y(x) = e^x$.

   (c) De forma análoga $\frac{d}{dx}(\log y(x)) = \cos x$ donde $y(x) = Ke^{\operatorname{sen} x}$. Introduzindo a condição inicial nesta expressão obtém-se $y(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

   (d) Usando a expressão da solução das equações lineares de primeira ordem

   $$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int_0^x e^t\,dt} + e^{\int_0^x e^t\,dt}\int_0^x e^{-\int_0^t e^u\,du}\cos t\,dt = \\ &= e^{e^x-1} + e^{e^x-1}\int_0^x e^{-e^t+1}\cos t\,dt. \end{aligned}$$

   (e) O facto da derivada em ordem y do segundo membro da equação não existir para $y = 0$ sugere que poderemos ter um problema de não unicidade para condições iniciais da forma $y(a) = 0$. De facto $y(x) = 0$ é solução do problema mas o mesmo acontece com $y(x) = \left(\frac{2}{3}\operatorname{sen} x\right)^{3/2}$.

2. A estimativa $(y^2+1)(1+x^2y^2) \geq y^2+1$ permite estabelecer que quaisquer soluções desta equação com condição inicial $y(0) = b$ majoram as soluções do problema

   $$\begin{cases} v' = v^2 + 1, \\ v(0) = b. \end{cases}$$

   Para este obtemos a solução $v(x) = \operatorname{tg}(x + \operatorname{arctg} b)$ que tende para $+\infty$ quando $x \to \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} b$.

   A existência e unicidade *local* de solção do problema decorrem do teorema de Cauchy-Picard graças à aplicação $(x,y) \mapsto (y^2+1)(1+x^2y^2)$ ser uma função de classe C^1.