Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Solução do exercício teste de

5 a 14 de Abril de 2000

Exercício.

a) Uma função $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(x+iy) = \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} + iv(x,y)$$

em que $v : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função desconhecida. Decida se pode ou não determinar v de maneira a f ser analítica em $B_1(0)$. Na afirmativa determine o desenvolvimento de Taylor de f em potências de z.

b) Considere, para $a > 0$, a linha L_a definida em $\mathbb{C}$ por um caminho $z(t)$ que percorre a fronteira do rectângulo $\{x+iy \in \mathbb{C} : -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ uma vez no sentido directo. Seja $k \in]0,1[$. Calcule

$$\oint_{L_a} \frac{e^{kz}}{1+e^z}\, dz.$$

Use esse cálculo para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x}\, dx.$$

c) Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}$ e uma função analítica $h : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que para $j \in \mathbb{Z}$

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j}\, dz = \begin{cases} 2\pi i/(j-1)!, & \text{para } j \in \mathbb{N} \text{ par}, \\ 0, & \text{nos restantes casos}, \end{cases}$$

para uma circunferência γ centrada em 0, percorrida uma vez no sentido directo, e com raio suficientemente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U. Se a sua resposta fôr afirmativa classifique a singularidade de h em 0.

Esboço de resolução.

a) As condições de Cauchy-Riemann implicam que v deverá satisfazer as condições

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}\right) = \frac{2(x+1)y}{((1+x)^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}\right) = \frac{(1+x)^2+y^2-2(1+x)^2}{((1+x)^2+y^2)^2} = \frac{y^2-(1+x)^2}{((1+x)^2+y^2)^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Destas duas igualdades a primeira presta-se a uma primitivação imediata para obter que se um tal v existe deve satisfazer

$$v(x,y) = -\frac{y}{(1+x)^2+y^2)} + h(y)$$

para alguma função h. Derivando esta expressão em ordem a y e comparando com a segunda equação de 1 obtém-se que podemos satisfazer o sistema 1 desde que h seja uma função constante.

Obteve-se assim uma resposta afirmativa com todos os f possíveis da forma

$$f(x+iy) = \frac{1+x-iy}{(1+x)^2+y^2} + ic = \frac{1}{z+1} + ic$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

b) Primeiro convém localizar todas as singularidades da função integranda. A única possibilidade são as soluções da equação $e^z+1=0$. Introduzindo $z = x+iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ isto é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} e^x \cos y = -1, \\ e^x \operatorname{sen} y = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação obtemos $y = k\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Introduzindo esta informação na primeira equação obtemos

$$e^x(-1)^m = -1$$

donde $x = 0$ e m deve ser ímpar. Assim a função integranda tem singularidades em $z = (2l+1)\pi i$, $l \in \mathbb{Z}$. A única destas singularidades na região limitada pela linha L_a é $z = i\pi$ (ver a figura 1).

Convém agora saber com que tipo de singularidade estamos a lidar. Sendo a exponencial uma função inteira e valendo -1 em $i\pi$ temos

$$1 + e^z = c_1(z-i\pi) + c_2\frac{(z-i\pi)^2}{2} + \dots$$

donde

$$\frac{1}{1+e^z} = \frac{1}{z(c_1 + c_2(z-i\pi) + \dots)}.$$

Como $i\pi$ não é um zero de e^{kz} se $k \in]0,1[$ e c_1 é a derivada da exponencial em πi, que não é 0, podemos concluir que πi é um pólo de primeira ordem de e^z. Assim o teorema dos resíduos garante

$$\oint_{L_a} \frac{e^{kz}}{1+e^z}\,dz = 2\pi i \lim_{z\to\pi i} \frac{e^{kz}(z-\pi i)}{1+e^z} = 2\pi i \frac{e^{k\pi i}}{e^{\pi i}} = -2\pi i e^{k\pi i}. \tag{2}$$

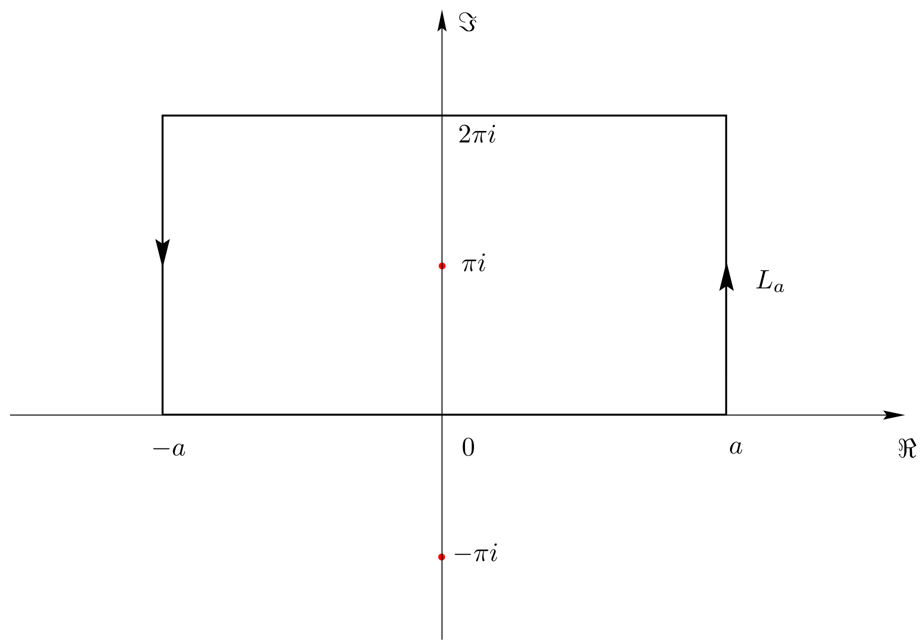

Figura 1: A linha L_a e as singularidades da função integranda.

Note que na última igualdade usa-se $\lim_{z\to\pi i} \frac{(z-\pi i)}{1+e^z} = \frac{1}{\frac{d}{dz}(e^z)|_{z=\pi i}}$.

Consideramos agora como obter informação àcerca do valor do integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x}\, dx$. O que é natural é deixar $a \to \infty$ na igualdade (2) depois se decompor o integral em quatro integrais correpondentes a cada um dos lados do rectângulo. Para isso escrevemos, usando as parametrizações que se obtêm para cada um dos segmentos de recta usando como parâmetro a parte real ou o coeficiente da parte imaginária,

$$\begin{aligned}\oint_{L_a} \frac{e^{kz}}{1+e^z}\, dz = &\int_{-a}^{a} \frac{e^{kx}}{1+e^x}\, dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{k(a+iy)}}{1+e^{(a+iy)}} i\, dy \\ &- \int_{-a}^{a} \frac{e^{k(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\, dx - \int_0^{2\pi} \frac{e^{k(-a+iy)}}{1+e^{(-a+iy)}} i\, dy \\ \equiv &I_1^a + I_2^a - I_3^a - I_4^a\end{aligned} \tag{3}$$

em que a última linha indica que os integrais do membro anterior da igualdade passam a ser designados respectivamente por $I_1^a, \ldots, I_4^a$. A seguir mostramos que $I_2^a, I_4^a \to 0$ quando $a \to \infty$. Com efeito, quando $a \to \infty$,

$$|I_2^a| \leq 2\pi e^{(k-1)a} \max_{y\in[0,2\pi]} \left| \frac{1}{e^{-k(a+iy)}+1} \right| \leq 2\pi e^{(k-1)a} \frac{1}{1-e^{-ka}} \to 0,$$

$$|I_4^a| \leq 2\pi e^{-ka} \max_{y\in[0,2\pi]} \left| \frac{e^{-iky}}{1+e^{-a+iy}} \right| \leq 2\pi e^{-ka} \frac{1}{1-e^{-a}} \to 0.$$

Finalmente[1]

$$\lim_{a\to\infty} I_1^a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x}\,dx,$$
$$\lim_{a\to\infty} I_3^a = e^{2k\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x}\,dx.$$

Assim estabelecemos uma equação satisfeita pelo integral que pretendemos calcular

$$(1-e^{2k\pi i})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i e^{k\pi i},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x}\,dx &= 2\pi i\frac{e^{k\pi i}}{e^{2k\pi i}-1}\\ &= 2\pi i\frac{\cos k\pi + i\operatorname{sen} k\pi}{1-2\operatorname{sen}^2 k\pi + 2i\operatorname{sen} k\pi\cos k\pi - 1} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi}.\end{aligned}$$

c) Se a função h existir terá um desenvolvimento em série de Laurent válido numa vizinhança de 0

$$h(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k.$$

Admitindo temporariamente a troca do integral com a(s) série(s) teríamos

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j}\,dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\oint_\gamma c_k z^{k-j}\,dz = 2\pi i c_{j-1}.$$

Daí que o candidato a h deva satisfazer

$$c_{j-1} = \begin{cases} \frac{1}{(j-1)!}, & \text{para } j\in\mathbb{N} \text{ par},\\ 0, & \text{nos restantes casos.}\end{cases}$$

Verificamos então que $h(z) = z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots = \operatorname{sh} z$ satisfaz todas as propriedades desejadas, nomeadamente a troca do integral com a série.

[1] Justifique que o integral de facto existe!