

# Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão  
Exercício suplementares para a semana de

13 de Março de 2000

**Exercício 1** *Determine o raio de convergência e a soma das séries*

1.  $\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2k}$ .

2.  $\sum_{k=1}^{+\infty} kz^{2k-1}$ .

**Exercício 2** *Mostre que a inversão  $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{z}$  transforma rectas que passam na origem (mas removendo a origem) em rectas que passam na origem (idem).*

**Exercício 3** *Mostre que a inversão  $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{z}$  transforma:*

1. a recta definida por  $\Im(z) = 1$  na circunferência de raio  $1/2$  centrada em  $-i/2$  (excluindo 0).
2. rectas que não passam na origem em circunferências que “tocam” a origem (mas a que se deve excluir a origem). Determine o raio e o centro de tais circunferências em função da equação da recta. **Sugestão:** Reduza esta questão à alínea anterior usando homotetias e rotações.

**Exercício 4** *Determine a imagem de  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1\}$  pela aplicação  $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{2}{z+1}$ .*

**Exercício 5** *Mostre que a inversão  $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{z}$  transforma circunferências que não passam pela origem em circunferências que não passam pela origem e relacione os centros e raios de tais circunferências. **Sugestão:** Trate separadamente o caso de circunferências centradas na origem (fácil!) e o caso de circunferências não centradas na origem. Neste último caso comece por considerar a imagem do ponto mais perto da origem e do ponto mais distante da origem, “adivinhe” o raio e centro da circunferência imagem e mostre que o seu palpite está correcto.*

**Exercício 6** *Determine a imagem de  $A = \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, x < 1, (x - 1)^2 + y^2 < 1, (x - 1)^2 + y^2 > 1/4\}$  pela aplicação  $z \mapsto 1 + \frac{2}{z}$ .*