Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício suplementares para a semana de

20 de Março de 2000

Exercício 1 *Uma função* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é da forma*

$$f(x+iy) = u(x,y) + ie^{-x}(x\cos y + y \operatorname{sen} y)$$

em que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é uma função desconhecida. Decida se pode ou não determinar* u *de maneira a*

$$\oint_L f(z)\,dz = 0$$

para toda a linha fechada regular L *no plano complexo. Se optar pela afirmativa calcule uma tal função* u.

Exercício 2 *Decida se existe ou não uma vizinhança* U *de* 0 *em* $\mathbb{C}$ *e uma função analítica* $h : U \to \mathbb{C}$ *tal que para* $j \in \mathbb{N}$

$$\oint_\gamma \frac{h(z)}{z^j}\,dz = \begin{cases} -\pi i & \text{para } j \geq 2 \\ 0 & \text{para } 0 \leq j < 2 \end{cases}$$

para uma circunferência γ *centrada em* 0*, percorrida uma vez no sentido directo, e com raio suficientemente pequeno para o círculo respectivo estar contido em* U*. Se a sua resposta fôr afirmativa determine* h *e o "maior"* U *possível.*

Exercício 3 *Volte a considerar o exercício modelo e o exercício teste. Decida em que casos pode aplicar o teorema de Cauchy e a fórmula integral de Cauchy na sua resolução.*