

Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício suplementares para a semana de

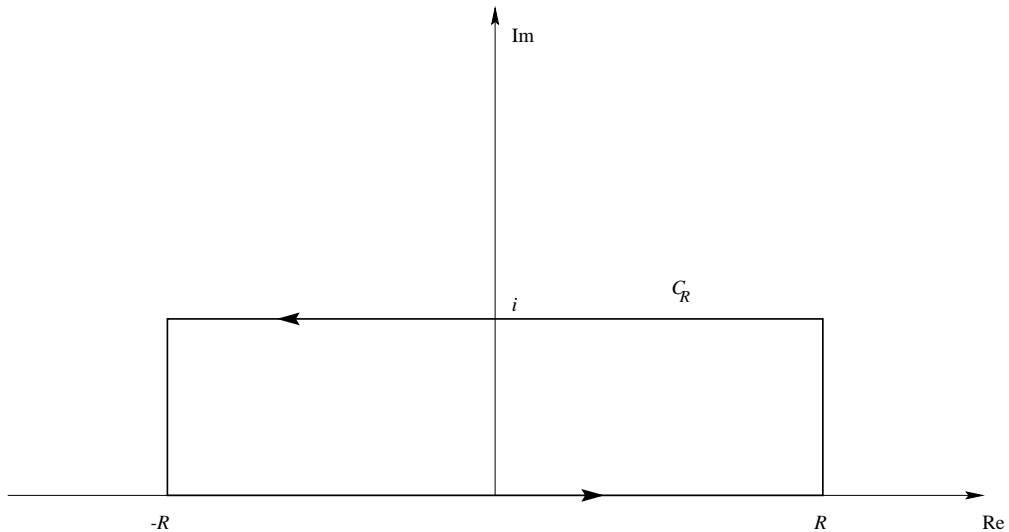
29 de Março a 5 de Abril de 2000

Exercício 1 Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é da forma

$$f(x + iy) = e^{-x}(\sin y + g(x)) + ie^{-x}(\cos y + h(y))$$

em que $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções desconhecidas. Decida se pode ou não determinar g e h de maneira a para cada ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ existir uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_{z_0, n}(z - z_0)^n$ em que $z = x + iy$, que representa f numa vizinhança de z_0 . Na afirmativa calcule todos os possíveis pares de tais funções g e h .

Exercício 2 Considere, para $R > 0$, o caminho C_R em \mathbb{C} sugerido pela figura e percorrido uma vez no sentido indicado. Calcule



$$\oint_{C_R} e^{-z^2} dz.$$

Use esse cálculo para relacionar os integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx.$$

Exercício 3 Decida se existe ou não uma vizinhança U de 0 em \mathbb{C} e uma função analítica $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para $j \in \mathbb{N}$

$$\oint_{\gamma} \frac{h(z)}{z^j} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{para } j \geq 2 \\ 0 & \text{para } 0 \leq j < 2 \end{cases}$$

para uma circunferência γ centrada em 0 , percorrida uma vez no sentido directo, e com raio suficientemente pequeno para o círculo respectivo estar contido em U . Se a sua resposta for afirmativa calcule o respectivo desenvolvimento de Taylor em torno de 0 e o “maior” U possível.

Exercício 4 *Idem* para

$$\int_C \frac{h(z)}{z^j} dz = j! \quad \text{para } j \in \mathbb{N}.$$