Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Exercício suplementares para

6 a 23 de Maio de 2000

Exercício 1 *Seja* $f(x) = |x\cos x|$. *Determine os coeficientes* a_n, b_n *da série de Fourier*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

relativa a f.

Exercício 2 *Determine* $u(x,y)$ *contínua e definida em* $[-1,1]\times[0,+\infty[$ *tal que*

$$\begin{cases} \Delta u = 6x, & \\ u(-1,y) = -u(1,y) = -1 & \text{para } y \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = x^3 + \operatorname{sen}^3(\pi x) & \text{para } x \in [-1,1], \\ \lim_{y\to\infty} u(x,y) - x^3 = 0 & \text{para } x \in [-1,1]. \end{cases}$$

Exercício 3 *Determine* $u(t,x)$ *definida em* $[0,+\infty[\times[0,2\pi]$ *tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0, & \\ u(0,x) = \operatorname{sen}^3 x & \text{para } x \in [0,2\pi], \\ u(t,0) = u(t,2\pi) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

Exercício 4 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ *um aberto*[1] *com fronteira* $\partial\Omega$. *O problema de Dirichlet para o operador de Laplace relativo a* Ω *consiste em dada uma função* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *contínua*[2] *determinar* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *e*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *uma função analítica com parte real* u, *isto é,* $u(x,y) = \Re f(x+iy)$ *para* $x+iy \in \Omega$, $x,y \in \mathbb{R}$.

a) Mostre, a partir das condições de Cauchy-Riemann, que a parte real u *de* f *é uma função harmónica.*

b) Justifique, que se $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é uma uma função diferenciável então* g *definida por* $g(z) = F(1/z)$ *é uma função analítica em* $W = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : 1/z \in \Omega\}$.

[1] A notação $\cong$ significa que identificamos os dois espaços da maneira natural.
[2] No caso em que Ω não é limitado é natural adicionar condições suplementares no ∞.

c) *Deduza das duas alíneas anteriores que* $U(x,y) = u(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ *é uma função harmónica.*

d) *Seja* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > 1/4, (y - \frac{1}{2})^2 + x^2 > 1/4, x > 0, y > 0\}$*. Qual é a imagem de* S *através da inversão* $z \mapsto 1/z$*?*

e) *Resolva o problema de Dirichlet para o laplaciano quando* $\Omega = S$*, com* S *definido na alínea anterior, as condições na fronteira de* Ω *são*

$$u\left(\frac{1}{2}(1+\cos t), \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4\operatorname{sen}^2 t + 1}\right)$$

para $t \in [0, \pi/2]$*,* u *vale* 0 *nos restantes pontos da fronteira de* Ω *e*

$$\lim_{(x,y)\to\infty} u(x,y) = 0.$$