Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício modelo para a semana de

13 de Março de 2000

Exercício. Seja $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Define-se

$$f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

1. Use as condições de *Cauchy-Riemann* para mostrar que f é diferenciável.
2. Mostre que $\overline{f}$, a função conjugada de f, não é diferenciável.
3. Exprime $f'(z)$ em termos de $f(z)$.
4. Mostre que $f(z + w) = f(z)f(w)$ para todos os $z, w \in \mathbb{C}$.
5. Determine $f(\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im(z) \leq \frac{\pi}{4}\})$.

Esboço de resolução.

1. Sejam $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. Temos

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   Como $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ podemos concluir que f é diferenciável em $\mathbb{C}$.
2. Não existem pontos do plano complexo onde se verifiquem as condições de Cauchy-Riemann para $\overline{f}$ pois o sistema de Cauchy-Riemann reduz-se à anulação simultânea do sen e do cos o que é impossível.
3. $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \cos y = f(z)$.
4. Nesta alínea convencionamos $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$.

   $$f(z + w) = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2))$$

   e o resultado segue das fórmulas trigonométricas para o cosseno e seno da soma.
5. A imagem de $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$ por f é o conjunto

   $$\left\{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right\} =$$
   $$= \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Comentário. *A função que neste exercício é estudada é a exponencial complexa. Note-se que* 0 *não pertence ao contradomínio de* f. *Há quem diga que é a função mais importante de toda a Análise Complexa.*