Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Exercício modelo para a semana de

13 de Março de 2000

Exercício.

1. Decida se cada um dos seguintes problemas tem uma solução única ou não. Quando optar pela afirmativa determine tal solução, quando optar pela negativa dê exmplo de duas soluções distintas.

   (a)
$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen} x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} y' = -y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (c)
$$\begin{cases} y' = ye^x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (d)
$$\begin{cases} y' - xy = e^x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (e)
$$\begin{cases} y' = y^{3/5} \cos x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Considere a equação diferencial
$$y' = (y^2 + 1)e^{x^2 y^2}.$$
   Mostre que esta equação não possui soluções definidas no intervalo $[0, +\infty[$. Justifique existência e unicidade de solução do problema de Cauchy.

Esboço de resolução.

1. Em todos os casos excepto no último podemos escrever $y' = f(x, y)$ com $f \in C^1$ daí que tenhamos existência e unicidade para o problema de Cauchy nestes casos.

(a) Por integração de ambos os membros da equação $y(x) = \cos x$.

(b) Para $y \neq 0$ podemos escrever

$$\frac{y'}{y^2} = -1$$

donde

$$\frac{-1}{y} = -x + C$$

donde $y(x) = \frac{1}{1+x}$.

(c) De maneira semelhante à alínea anterior pode-se separar variáveis para obter $y(x) = e^{e^x - 1}$.

(d) Trata-se de uma equação diferencial linear de primeira ordem, isto é, tem a forma $y' + P(x)y = Q(x)$. Tais equações têm solução do problema de Cauchy com condição inicial $y(a) = b$ dada por

$$y(x) = be^{-\int_a^x P(t)\,dt} + e^{-\int_a^x P(t)\,dt} \int_a^x e^{\int_a^t P(s)\,ds} Q(t)\,dt.$$

No caso presente

$$y(x) = e^{\int_0^x t\,dt} + e^{\int_0^x t\,dt} \int_0^x e^{-\int_0^t s\,ds} e^t\,dt = e^{x^2/2} + e^{x^2/2} \int_0^x e^{t - t^2/2}\,dt.$$

(e) Uma solução é $y(x) = 0$. Outra solução obtém-se por separação de variáveis e é $y(x) = (\frac{2\operatorname{sen} x}{5})^{5/2}$.

2. Como $e^{x^2y^2} \geq 1$ podemos estimar $y' \geq 1 + y^2$. Como as soluções de $v' = 1 + v^2$ são da forma $v(x) = \operatorname{tg}(x + C)$ a relação $y(x) \geq v(x)$ com $y(0) = v(0)$ fornece-nos o resultado pretendido.