Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Exercício modelo para a semana de

20 de Março de 2000

Exercício.

a) Determine se a equação diferencial $x^2y - (x^3 + y^3)y' = 0$ tem factores integrantes só dependentes da variável y. Em caso afirmativo determine o factor integrante e a solução geral da equação. Determine soluções particulares que satisfaçam $y(1) = -1$ e $y(1) = 0$.

b) Determine uma função real de variável real $y(t)$ tal que

$$\begin{cases} y'' \operatorname{sen} y' = \cos t, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -\pi/2. \end{cases}$$

Esboço de resolução.

a) Se a equação diferencial possuir um factor integrante só dependente da variável y, $\mu(y)$, a equação na forma

$$\mu(y)x^2y - \mu(y)(x^3 + y^3)y' = 0$$

será diferencial exacta logo deveremos ter

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)x^2y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\mu(y)(x^3 + y^3)\right).$$

Pode reescrever-se a igualdade anterior como

$$\mu'(y)x^2y + \mu(y)x^2 = -3x^2\mu(y)$$

ou

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{-4}{y}.$$

Resolvendo esta equação de variáveis separáveis obtém-se o factor integrante $\mu(y) = y^{-4}$. Usando este factor integrante a equação original passa a escrever-se na forma

$$x^2y^{-3} - (x^3y^{-4} + y^{-1})y' = 0$$

que é exacta. Determinando um potencial para um campo $(x,y) \mapsto (x^2y^{-3}, -(x^3y^{-4}+y^{-1}))$ por primitivação em ordem a x e a y respectivamente de cada uma das componentes do campo e comparando obtém-se que as soluções da equação diferencial deverão satisfazer

$$x^3y^{-3}/3 - \log|y| = C.$$

Para determinar uma solução satisfazendo $y(1) = -1$ substituimos $x = 1$ e $y = -1$ na igualdade anterior para obter $C = -1/3$. Uma tal solução fica definida perto de $(1,-1)$ por $x^3y^{-3}/3 - \log(-y) = -1/3$.

Note que para obter uma solução particular satisfazendo $y(1) = 0$ o processo anterior não pode ser aplicado mas reconhecemos que $y = 0$ é uma solução da equação original.

b) Começamos por considerar o problema

$$\begin{cases} v' \operatorname{sen} v = \cos t, \\ v(0) = -\pi/2. \end{cases}$$

A equação é de variáveis separáveis e facilmente se reconhece que as soluções deverão verificar $-\cos v(t) = \operatorname{sen} t + C$ para alguma constante C. A condição inicial implica que $C = 0$. Daí que $v(t) = -\arccos sent = -(\pi/2 - t)$. Logo $y'(t) = t - \pi/2$ com $y(0) = 1$ pelo que

$$y(t) = t^2/2 - t\pi/2 + 1.$$

Comentário. *A alínea b) ilustra como resolver uma equação de 2ª ordem que não depende de y através da resolução sucessiva de duas equações de 1ª ordem.*