Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício modelo para a semana de

29 de Março a 4 de Abril de 2000

Exercício. Considere as linhas fechadas:

C_1 definida por $z(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

C_2 definida por $z(t) = 2 + e^{-it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

C_3 definida por $z(t) = \cos t + i(2 \operatorname{sen} t + 1)$, $t \in [-\pi, \pi]$.

C_4 definida por $z(t) = 3e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$.

Calcule

$$\int_{C_k} \frac{\cos z}{z(z-2)^2(z^2-2z+5)}\, dz$$

para $k = 1, 2, 3, 4$.

Esboço de resolução.

Aplicamos a fórmula integral de Cauchy ou o teorema dos resíduos.

Começamos por saber aonde a função integranda é holomorfa. Como $(z^2 - 2z + 5) = (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$ concluimos facilmente que a função integranda é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0, 2, 1 + 2i, 1 - 2i\}$.

A linha C_1 é a circunferência de raio 1 centrada em 0 percorrida "uma vez" no sentido directo. De todas as singularidades da função integranda 0 é a única na região limitada por C_1.

A linha C_2 é a circunferência de raio 1 centrada em 2 percorrida "uma vez" no sentido retrógado. De todas as singularidades da função integranda 2 é a única na região limitada por C_2.

A linha C_3 é uma elipse centrada em i, cujos semi-eixos medem 2 e 1 e estão orientados segundo os eixos dos ys e dos xs respectivamente, percorrida "uma vez" no sentido directo. De todas as singularidades da função integranda 0 é a única na região limitada por C_3.

A linha C_4 é a circunferência de raio 3 centrada em 0 percorrida "duas vezes" no sentido directo. Todas as singularidades da função integranda encontram-se na região limitada por C_4.

Assim

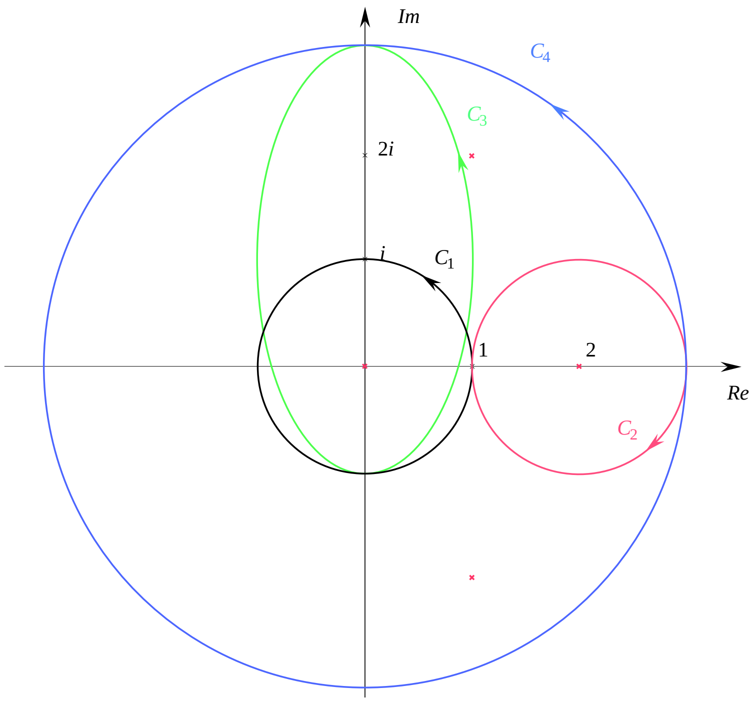

Figura 1: Esboço de C_1, C_2, C_3, e C_4 e dos pólos da função integranda.

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2(z^2-2z+5)}\,dz =& \int_{C_3} \frac{\cos z}{z(z-2)^2(z^2-2z+5)}\,dz \\
=& 2\pi i \left[\frac{\cos z}{(z-2)^2(z^2-2z+5)}\right]\Bigg|_{z=0} = \frac{\pi i}{10} \\
\int_{C_2} \frac{\cos z}{z(z-2)^2(z^2-2z+5)}\,dz =& -2\pi i \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{z(z^2-2z+5)}\right)\right]\Bigg|_{z=2} \\
\int_{C_4} \frac{\cos z}{z(z-2)^2(z^2-2z+5)}\,dz =& 4\pi i \left(\frac{\pi i}{10} + \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{z(z^2-2z+5)}\right)\right]\Bigg|_{z=2}\right. \\
&+ \left[\frac{\cos z}{z(z-1-2i)(z-2)^2}\right]\Bigg|_{z=1-2i} \\
&+ \left.\left[\frac{\cos z}{z(z-1+2i)(z-2)^2}\right]\Bigg|_{z=1+2i}\right)
\end{aligned}$$