Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Exercício-teste para

5 a 14 de Abril de 2000

Exercício. Determine a solução particular do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \cos(\sqrt{3}t) \end{cases}$$

que satisfaz $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

Esboço de resolução. Para esta sistema basta estudar uma equação linear de coeficientes constantes. Vamos considerar uma equação diferencial de segunda ordem para $y = x_1$. Com efeito devemos ter

$$y'' = \frac{d^2x_1}{dt^2} = -3\frac{dx_2}{dt} = -3(x_1 + \cos(\sqrt{3}t)) = -3(y + \cos(\sqrt{3}t)).$$

Designando por y_h a solução da equação homogénea associada obtemos

$$y_h(t) = \alpha_1 \cos(\sqrt{3}t) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}t)$$

donde pelo método do aniquilador as soluções da equação completa estarão entre as soluções de

$$(D^2 + 3)^2 v = 0.$$

Esta têm a forma

$$v(t) = \alpha_1 \cos(\sqrt{3}t) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}t) + \alpha_3 t \cos(\sqrt{3}t) + \alpha_4 t \operatorname{sen}(\sqrt{3}t) \tag{1}$$

De entre estas deveremos considerar aquelas que efectivamente satisfazem

$$(D^2 + 3)v = -3\cos(\sqrt{3}t).$$

O cálculo do primeiro membro conduz a

$$-2\sqrt{3}\alpha_3 \operatorname{sen}(\sqrt{3}t) + 2\sqrt{3}\alpha_4 \cos(\sqrt{3}t)$$

pelo que $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_4 = -\sqrt{3}/2$. Assim

$$y(t) = \alpha_1 \cos(\sqrt{3}t) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{2} t \operatorname{sen}(\sqrt{3}t).$$

As soluções gerais do sistema serão então dadas por

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 \cos(\sqrt{3}t) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{2} t \operatorname{sen}(\sqrt{3}t), \\ x_2(t) = -\frac{1}{3}\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_1 \operatorname{sen}(\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2 \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} t \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{sen}(\sqrt{3}t). \end{cases}$$

Para determinar a solução particular satisfazendo as condições iniciais dadas consideramos $t = 0$ para obter

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -\sqrt{3}. \end{cases}$$