Análise Matemática IV

Electrotecnia, ramo de Telecomunicações
Exercício modelo para

15 de Abril a 5 de Maio de 2000

Exercício. Considere a equação diferencial não-linear de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon\frac{dx}{dt} - x + x^3 = 0$$

em que ϵ é um parâmetro real positivo. Escreva um sistema de primeira ordem equivalente. Determine os respectivos pontos de equilíbrio. Para cada ponto de equilíbrio escreva o respectivo sistema linearizado e analise a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema original.

Esboço de resolução. Introduz-se $u \equiv x$ e $v = \frac{dx}{dt}$. Então um sistema equivalente é

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\epsilon v + u - u^3 \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio deste sistema são as soluções de

$$\begin{cases} 0 = v, \\ 0 = -\epsilon v + u - u^3, \end{cases}$$

isto é, $(u, v) = (0, 0)$, $(u, v) = (1, 0)$ e $(u, v) = (-1, 0)$.

Para linearizar em torno de cada um dos pontos de equilíbrio consideramos

$$F_\epsilon(u, v) = (v, -\epsilon v + u - u^3)$$

cuja matriz jacobiana num ponto genérico é

$$J_{F_\epsilon}(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3u^2 & -\epsilon \end{bmatrix}$$

Assim

$$J_{F_\epsilon}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\epsilon \end{bmatrix}$$

$$J_{F_\epsilon}(1, 0) = J_{F_\epsilon}(-1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\epsilon \end{bmatrix}$$

Os valores próprios destas matrizes são $\frac{-\epsilon+\sqrt{\epsilon^2+4}}{2}$ e $\frac{-\epsilon-\sqrt{\epsilon^2+4}}{2}$ (e portanto sempre reais e de sinais opostos) em $(0, 0)$ e $\frac{-\epsilon+\sqrt{\epsilon^2-8}}{2}$ e $\frac{-\epsilon-\sqrt{\epsilon^2-8}}{2}$ em $(1, 0)$ e em $(-1, 0)$. Os valores próprios nestes dois pontos são ambos negativos se $\epsilon \geq \sqrt{8}$ e complexos conjugados com parte real negativa se $0 < \epsilon < \sqrt{8}$. Podemos concluir que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio instável e $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ pontos de equilíbrio estáveis para todos os valores de $\epsilon > 0$.