Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício-teste para

6 a 12 de Maio de 2000

Exercício. Determine as soluções gerais e as soluções particulares satisfazendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ da seguinte equação:

$$y'' + y = e^{-x} + \cos x.$$

Esboço de resolução. O polinómio característico para este operador diferencial linear de coeficientes constantes é $D^2 + 1$. A solução geral da equação homogénea é

$$y_h(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x.$$

Aplicando os operadores $D^2 + 1$ e $D + 1$ a ambos os membros da equação verificamos que as soluções da equação particular estarão entre as soluções de

$$(D^2 + 1)^2(D + 1)v = 0$$

Esta equação tem solução geral

$$v(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + C_3 x \operatorname{sen} x + C_4 x \cos x + C_5 e^{-x}.$$

Reintroduzindo tais soluções naequação original verificamos que devemos satisfazer

$$(D^2 + 1)(C_3 x \operatorname{sen} x + C_4 x \cos x + C_5 e^{-x}) = e^{-x} + \cos x$$

ou, efectuando os cálculos no primeiro membro,

$$\begin{aligned}
(D^2 + 1)(C_3 x \operatorname{sen} x + C_4 x \cos x + C_5 e^{-x}) = \\
&= C_3 x \operatorname{sen} x + C_4 x \cos x + C_5 e^{-x} + \\
&\quad + D(C_3 \operatorname{sen} x + C_3 x \cos x + C_4 \cos x - C_4 x \operatorname{sen} x - C_5 e^{-x}) = \\
&= 2C_5 e^{-x} + 2C_3 \cos x - 2C_4 \operatorname{sen} x,
\end{aligned}$$

pelo que

$$2C_5 e^{-x} + 2C_3 \cos x - 2C_4 \operatorname{sen} x = e^{-x} + \cos x$$

o que implica $C_5 = 1/2$, $C_3 = 1/2$, $C_4 = 0$. Assim a solução geral da equação original é

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} e^{-x}.$$

A solução do problema satisfazendo as condições iniciais é agora determinável a partir de

$$\begin{cases} y(0) = C_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ y'(0) = C_1 - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

pelo que será

$$y(x) = \frac{3}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$