Análise Matemática IV

Electrotecnia (excepto Telecomunicações) e Gestão
Exercício modelo para

2 a 6 de Junho de 2000

Exercício.

a) Determine justificadamente uma função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ cuja transformada de Laplace seja:

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}\,(f)(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2+s+1}.$$

b) (1,5)

$$F(s) \equiv \mathcal{TL}\,(f)(s) = \frac{1}{s}G(s+1)$$

em que G designa a transformada de Laplace da função definida por $\sqrt{t}e^{-t}$ para $t > 0$.

Esboço de resolução.

a) Começamos por notar[1] que se $g : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ possui transformada de Laplace $G(s)$ então, definindo para $t > \tau > 0$, $g_\tau(t) = g(t-\tau)$ temos, designando a transformada de Laplace de g_τ por G_τ,

$$\begin{aligned} G_\tau(s) &= \int_0^{+\infty} g_\tau(t)e^{-st}\,dt = \int_\tau^{+\infty} g(t-\tau)e^{-st}\,dt = \\ &= \int_0^{+\infty} g(u)e^{-s(u+\tau)}\,du = e^{-s\tau}G(s). \end{aligned}$$

Em particular com $\tau = 2$ isto permite reduzir esta alínea a encontrar uma função cuja transformada de Laplace seja $\frac{s}{s^2+s+1}$. Como

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2+s+1} &= \frac{s}{(s+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(s+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(s+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})} - \frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(s+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{s+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}i}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{s+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \end{aligned}$$

[1] Esta resolução inclui a redemonstração de algum material conhecido que obviamente podia ser omitido.

verificamos que $\frac{s}{s^2+s+1}$ é a transformada de Laplace da função definida por

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}i}\right)e^{-(1+i\sqrt{3})t/2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}i}\right)e^{-(1-i\sqrt{3})t/2}=$$
$$=e^{-t/2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right].$$

Assim podemos considerar

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{para } t<2,\\ e^{-(t-2)/2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}(t-2)}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}(t-2)}{2}\right)\right], & \text{para } t\geq 2.\end{cases}$$

b) Usando directamente a definição de transformada de Laplace

$$\frac{1}{s}G(s+1)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(s+1)t}}{s}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-st}}{s}e^{-t}f(t)\,dt.$$

Integrando por partes na última expressão obtém-se

$$\frac{1}{s}G(s+1)=\int_0^{+\infty}e^{-st}\int_0^t e^{-u}f(u)\,du\,dt$$

pelo que podemos tomar $f(t)=\int_0^t e^{-u}f(u)\,du$.