AMIII - Termodinâmica dos Gases Ideais

17 de Janeiro de 2002

N moles de um gás ideal em equilíbrio são completamente caracterizadas se especificarmos o volume a pressão. Portanto o espaço dos *estados* de N moles de um gás ideal é a 2-variedade

$$M = \{(V,P) \in E^2 : P, V > 0\}.$$

A *temperatura* T de um gás ideal é definida pela *equação de estado dos gases ideais*:

$$PV = NRT$$

(onde R é a *constante dos gases ideais*).

A Primeira Lei da Termodinâmica afirma que existe uma função $E : M \to \mathbb{R}$, dita a *energia interna* do gás, cuja derivada exterior é

$$dE = đW + đQ,$$

onde $đW$, $đQ$ são 1-formas cujos integrais

$$\Delta W = \int_C đW$$
$$\Delta Q = \int_C đQ$$

representam o trabalho ΔW realizado sobre gás e o calor ΔQ absorvido pelo gás quando este percorre os estados de equilíbrio da curva C. Tem-se portanto

$$đW = -PdV.$$

1. Mostre que $đW$ e $đQ$ não são exactas. É por este motivo que se emprega o símbolo $đ$.

2. A *capacidade calorífica a volume constante* é por definição a taxa de absorção de calor por unidade de acréscimo de temperatura quando o volume é mantido constante:

   $$C_V = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T},$$

   onde

   $$\Delta Q = \int_{[(V,P);(V,P+\Delta P)]} đQ$$

   e

   $$\Delta T = T(V, P + \Delta P) - T(V, P).$$

   Mostre que

   $$C_V = \frac{NR}{V} \frac{\partial E}{\partial P}.$$

3. A *capacidade calorífica a pressão constante* é por definição a taxa de absorção de calor por unidade de acréscimo de temperatura quando a pressão é mantida constante:

$$C_P = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T},$$

onde

$$\Delta Q = \int_{[(V,P);(V+\Delta V,P)]} \text{đ}Q$$

e

$$\Delta T = T(V + \Delta V, P) - T(V, P).$$

Mostre que

$$C_P = \frac{NR}{P} \left(\frac{\partial E}{\partial V} + P \right).$$

4. Assumimos a partir de agora que C_V e C_P são constantes para um gás ideal (de facto isto constitui uma boa aproximação). Mostre que nesse caso

$$C_P = C_V + NR$$

e

$$E = C_V T + \text{constante}.$$

5. Mostre que a 1-forma

$$dS = \frac{\text{đ}Q}{T}$$

é de facto exacta e calcule um potencial S. A função $S : M \to \mathbb{R}$ assim definida (a menos de uma constante) diz-se a *entropia* do gás. A sua existência é uma consequência de termos assumido C_V e C_P constantes, mas é garantida em sistemas termodinâmicos gerais pela Segunda Lei da Termodinâmica.