1^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

15 de Setembro de 2003

1. Seja $F(x, y) = f(x, xy)$ (com $f : E^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2). Exprima a derivada parcial mista F_{12} à custa de derivadas parciais de f.

2. Seja $F(x, y) = f(x, y, g(x, y))$ (com $f : E^3 \to \mathbb{R}$ e $g : E^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2). Exprima as derivadas parciais de ordens 1 e 2 de F à custa de derivadas parciais de f e g.

3. Sejam $f : E^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to E^n$ funções diferenciáveis.

   (a) Mostre que a derivada de $f \circ \mathbf{g}$ é a derivada direccional de f segundo $\frac{d\mathbf{g}}{dt}$.

   (b) Mostre que dado $\mathbf{x}_0 \in E^n$ tal que $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, o máximo do conjunto

   $$\{D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) : \|\mathbf{v}\| = 1\} \subset \mathbb{R}$$

   é atingido exactamente quando

   $$\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}.$$

   (Por outras palavras, o gradiente indica a direcção de crescimento máximo da função).

4. Sejam $f : E^3 \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to E^3$ definidas por

   $$f(x, y, z) = 5(x-2)^2 + 5(y-1)^2 + 2(x-2)(y-1) + z^2$$
   $$\mathbf{g}(t) = (\cos(t), \cos(t), \operatorname{sen}(t))$$

   (a) Em que pontos a curva parametrizada por $\mathbf{g}$ é vertical?

   (b) Em que pontos a superfície definida pela equação $f = 1$ é horizontal?

5. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijectiva e de classe C^1 cuja inversa não seja de classe C^1.

6. Seja $\mathbf{f} : E^2 \to E^2$ definida por

   $$\mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y).$$

   (a) Mostre que $\mathbf{f}$ é *localmente invertível*, i.e., que dado um ponto qualquer $\mathbf{x}_0 \in E^2$ existe uma vizinhança $V \ni \mathbf{x}_0$ na qual $\mathbf{f}$ é invertível.

   (b) Será **f** globalmente invertível? Justifique.

   (c) Calcule $D\mathbf{f}^{-1}(1, 0)$.

7. Seja $\mathbf{f} :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to E^2$ definida por

$$\mathbf{f}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

   (a) Mostre que **f** é localmente invertível.
   (b) Será **f** globalmente invertível? Justifique.
   (c) Sendo $(x, y) = \mathbf{f}(r, \theta)$, calcule $D\mathbf{f}^{-1}(x, y)$.

8. Seja $\mathbf{f} : E^3 \to E^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2).$$

   (a) Determine todos os pontos para os quais o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local para **f**.
   (b) Será **f** globalmente invertível? Justifique.
   (c) Calcule $D\mathbf{f}^{-1}(2, 2, 2)$, onde $\mathbf{f}^{-1}$ é a inversa local de $\mathbf{f}$ numa vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$.

9. Considere a função $F : E^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = x^3 + x^2 - y^2.$$

   (a) Quais os pontos da curva de nível $F^{-1}(0)$ em que o Teorema da Função Implícita não garante a existência de uma vizinhança na qual o conjunto é da forma $y = f(x)$?
   (b) Esboce o conjunto de nível $F^{-1}(0)$. O que pode dizer sobre os pontos que determinou na alínea anterior?
   (c) Seja f a função cujo gráfico descreve $F^{-1}(0)$ numa vizinhança do ponto $(3, 6)$. Calcule $f'(3)$.

10. Considere a função $\mathbf{F} : E^4 \to E^2$ definida por

$$\mathbf{F}(x, y, z, w) = (y^2 + w^2 - 2xz, y^3 + w^3 + x^3 - z^3).$$

   (a) Mostre que existe uma vizinhança do ponto $(1, -1, 1, 1)$ na qual o conjunto de nível $\mathbf{F}^{-1}(0, 0)$ é dado por $x = f(y, w), z = g(y, w)$.
   (b) Calcule as derivadas parciais de f e g no ponto $(-1, 1)$.