4^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

19 de Novembro de 2001

1. Mostre que se $f : A \subset E^n \to [0, +\infty[$ é mensurável então o conjunto

$$B = \left\{(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \in E^{n+1} : (x^1, \ldots, x^n) \in A, 0 \leq x^{n+1} \leq f(x^1, \ldots, x^n)\right\}$$

satisfaz $V_{n+1}(B) = \int_A f dV_n$. Use este resultado para calcular a medida dos seguintes conjuntos ilimitados:

   (a) $\left\{(x, y) \in E^2 : x \geq 1, |y| \leq \dfrac{1}{x^2}\right\}$;

   (b) $\left\{(x, y) \in E^2 : x \geq e, |y| \leq \dfrac{1}{\log x}\right\}$;

   (c) $\left\{(x, y, z) \in E^3 : 0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}\right\}$.

2. Decida se as funções seguintes são ou não integráveis nos conjuntos indicados, e calcule os integrais caso existam:

   (a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ em $[1, +\infty[$;

   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ em $\left\{(x, y) \in E^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\right\}$;

   (c) $\dfrac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{x^2 + y^2 + z^2}$ em $E^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

3. Calcule a derivada das seguintes funções:

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^3} e^{-xt^2} dt \quad (x > 0)$;

   (b) $G(x) = \displaystyle\int_{\log x}^{x} \frac{e^{-x^2t^2}}{t} dt \quad (x > 1)$.

4. Calcule os seguintes integrais para todo o $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$;

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(1 + x^2)^{n+1}} dx$.

5. Considere as funções

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt; \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt; \qquad F(x) = f^2(x) + g(x).$$

   (a) Mostre que F é constante.
   (b) Mostre que $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{4}$.
   (c) Mostre que $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$.
   (d) Conclua que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. Calcule os seguintes produtos exteriores:

   (a) $(dx + dy) \wedge (dx - dy)$;
   (b) $(dx + 2dy + 3dz) \wedge (dx - \frac{1}{2}dy + dz)$;
   (c) $(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \wedge (yz^2 dx + x^2 zdy + xy^2 dz)$;
   (d) $(dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) \wedge (dx^1 \wedge dx^3 - 3dx^2 \wedge dx^4)$.

7. Dado um vector

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3 \in E^3$$

definimos o 1-covector

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^1 + v^2 dx^2 + v^3 dx^3$$

e o 2-covector

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^2 \wedge dx^3 + v^2 dx^3 \wedge dx^1 + v^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Mostre que

   (a) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}$, onde $\times$ designa o produto externo de vectores em E^3;
   (b) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \Omega_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

8. Mostre que

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

9. Calcule os *pull-backs* pelas funções indicadas das seguintes formas diferenciais:

   (a) $yzdx + xzdy + xydz$ pela função $(x, y, z) = \mathbf{g}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$;
   (b) $-ydx + xdy$ pela função $(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)$;
   (c) $dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ pela função $(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$;
   (d) $dx \wedge dy \wedge dz$ pela função $(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta)$.

10. Calcule as derivadas exteriores das seguintes formas diferenciais:

   (a) $yzdx + xzdy + xydz$;
   (b) $-ydx + xdy$;
   (c) $zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$;
   (d) $x^1x^2x^3x^4(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 + dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4)$.