5^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

6 de Novembro de 2002

1. Decida se as seguintes formas diferenciais definidas em E^3 são ou não exactas. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

   (a) $yzdx + xzdy + xydz$;

   (b) $zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$;

   (c) $2dx \wedge dy + yzdx \wedge dz + xzdy \wedge dz$;

   (d) $x^2ye^zdx \wedge dy \wedge dz$.

2. Seja $f : E^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar e $\mathbf{v} : E^3 \to E^3$ um campo vectorial. Recorde que se $\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3$, podemos definir a 1-forma $\omega_{\mathbf{v}} = v^1dx + v^2dy + v^3dz$ e a 2-forma $\Omega_{\mathbf{v}} = v^1dy \wedge dz + v^2dz \wedge dx + v^3dx \wedge dy$. Mostre que:

   (a) $df = \omega_{\nabla f}$, onde ∇f designa o gradiente de f.

   (b) $d\omega_{\mathbf{v}} = \Omega_{\nabla\times\mathbf{v}}$, onde

   $$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v^3}{\partial y} - \frac{\partial v^2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial z} - \frac{\partial v^3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3$$

   é o *rotacional* de $\mathbf{v}$.

   (c) $d\Omega_{\mathbf{v}} = (\nabla \cdot \mathbf{v})dx \wedge dy \wedge dz$, onde

   $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v^3}{\partial z}$$

   é a *divergência* de $\mathbf{v}$.

   (d) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

   (e) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$.

3. Mostre a 1-forma

   $$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

   (definida em $E^2 \setminus \{(0,0)\}$) é fechada mas não é exacta. (**Sugestão:** *Mostre primeiro que se* $\omega = df$ *então* $\oint_\gamma \omega = 0$ *para qualquer curva fechada* γ).

4. Calcule os integrais das formas diferenciais dadas ao longo das variedades indicadas com uma orientação à sua escolha:

   (a) $-ydx + xdy$ ao longo de $\{(x, y) \in E^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;

   (b) $xdx + ydy + zdz$ ao longo de $\{(x, y, z) \in E^3 : x = z, x^2 + y^2 = 1\}$;

   (c) $dx \wedge dy$ ao longo de $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$;

   (d) $zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$ ao longo de $\{(x, y, z) \in E^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$.

5. Calcule a área da superfície curva de um cone circular recto de altura $h > 0$ e raio da base $a > 0$.

6. Escreva a área do elipsóide de semieixos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ como um integral iterado.

7. Prove o Segundo Teorema de Pappus: a área de uma superfície de revolução gerada por uma curva plana é igual a $2\pi dL$, onde L é o comprimento da curva plana e d é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular a área da superfície do toro
$$T = \left\{(x, y, z) \in E^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\right\}$$
   $(0 < r < R)$.

8. Seja S a superfície
$$S = \left\{(x, y, z) \in E^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1\right\}.$$
   Calcule:

   (a) A área de S;

   (b) O centróide de S.

9. Calcule o trabalho realizado pela força
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$
   ao longo da curva
$$C = \{(x, y, z) \in E^3 : x = \cos\theta, y = \operatorname{sen}\theta, z = 2\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$
   percorrida no sentido dos valores de z decrescentes.

10. O campo de velocidades de um fluido é descrito pelo campo vectorial
$$\mathbf{v} = (x, y, -2z).$$
   Supondo que o fluido possui densidade constante igual a 1, calcule a massa de fluido que atravessa a superfície
$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 1\}$$
   por unidade de tempo no sentido dos valores de z decrescentes.