Resolução Sumária da 5^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

16 de Janeiro de 2002

1. Decida se as seguintes formas diferenciais definidas em E^3 são ou não exactas. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

   (a) $yzdx + xzdy + xydz$;
   Resolução: Como E^3 é um conjunto em estrela, segue-se do Lema de Poincaré que esta 1-forma será exacta *sse* for fechada. Ora

   $$\begin{aligned} & d(yzdx + xzdy + xydz) \\ & = zdy \wedge dx + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy + xdz \wedge dy + ydx \wedge dz + xdy \wedge dz \\ & = (z - z)dx \wedge dy + (y - y)dx \wedge dz + (x - x)dy \wedge dz = 0, \end{aligned}$$

   pelo que a forma é exacta. Para calcular um potencial, notamos que se

   $$yzdx + xzdy + xydz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

   então teremos

   $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz \\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = xyz + C(y,z) \\ xz + \frac{\partial C}{\partial y} = xz \\ xy + \frac{\partial C}{\partial z} = xy \end{cases} \Leftrightarrow f = xyz + C$$

   para alguma constante $C \in \mathbb{R}$.

   (b) $zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$;
   Resolução: Uma vez que

   $$\begin{aligned} & d(zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz) \\ & = dz \wedge dx \wedge dy - dy \wedge dx \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dz \\ & = 3dx \wedge dy \wedge dz \neq 0, \end{aligned}$$

   a forma não é fechada e portanto não pode ser exacta.

   (c) $2dx \wedge dy + yzdx \wedge dz + xzdy \wedge dz$;
   Resolução: Como E^3 é um conjunto em estrela, esta 1-forma será exacta *sse* for fechada. Ora

   $$d(2dx \wedge dy + yzdx \wedge dz + xzdy \wedge dz) = zdy \wedge dx \wedge dz + zdx \wedge dy \wedge dz = 0$$

pelo que a forma é exacta. Para calcular um potencial $\eta = Adx + Bdy + Cdz$, notamos que uma vez que $\eta + df$ é também um potencial (qualquer que seja a função C^∞ $f : E^3 \to \mathbb{R}$), podemos sempre escolher um potencial tal que por exemplo $C = 0$ (se inicialmente $C \neq 0$, basta encontrar uma função f satisfazendo a equação $\frac{\partial f}{\partial z} = -C$ e considerar o potencial $\eta + df$). Supondo então $\eta = Adx + Bdy$, temos

$$2dx\wedge dy + yzdx\wedge dz + xzdy\wedge dz = d\eta = -\frac{\partial A}{\partial z}dx\wedge dz - \frac{\partial B}{\partial z}dy\wedge dz + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

e portanto

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 2 \\ -\frac{\partial A}{\partial z} = yz \\ -\frac{\partial B}{\partial z} = xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{z^2}{2} + \frac{\partial \beta}{\partial x} - \left(-\frac{z^2}{2}\right) - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 2 \\ A = -y\frac{z^2}{2} + \alpha(x,y) \\ B = -x\frac{z^2}{2} + \beta(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 2 \\ A = -\frac{yz^2}{2} + \alpha(x,y) \\ B = -\frac{xz^2}{2} + \beta(x,y) \end{cases}.$$

Um potencial pode portanto ser obtido fazendo $\alpha = 0$ e $\beta = 2x$, i.e.,

$$\eta = -\frac{yz^2}{2}dx + \left(-\frac{xz^2}{2} + 2x\right)dy.$$

(d) $x^2ye^zdx \wedge dy \wedge dz$.

Resolução: Uma vez que a derivada exterior desta 3-forma é uma 4-forma em E^3, é necessariamente nula. Portanto esta 3-forma é fechada, e uma vez que E^3 é em estrela, é exacta. Procurando um potencial da forma

$$\eta = fdx \wedge dy$$

rapidamente se obtém

$$\frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy = x^2ye^zdx \wedge dy \wedge dz \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = x^2ye^z \Leftrightarrow f = x^2ye^z + C(x,y).$$

Portanto um potencial é por exemplo

$$\eta = x^2ye^zdx \wedge dy$$

2. Seja $f : E^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar e $\mathbf{v} : E^3 \to E^3$ um campo vectorial. Recorde que se $\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3$, podemos definir a 1-forma $\omega_{\mathbf{v}} = v^1dx + v^2dy + v^3dz$ e a 2-forma $\Omega_{\mathbf{v}} = v^1dy \wedge dz + v^2dz \wedge dx + v^3dx \wedge dy$. Mostre que:

(a) $df = \omega_{\nabla f}$, onde ∇f designa o gradiente de f.
Resolução: Tem-se

$$\omega_{\nabla f} = \omega_{\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_3} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df.$$

(b) $d\omega_{\mathbf{v}} = \Omega_{\nabla\times\mathbf{v}}$, onde

$$\nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v^3}{\partial y} - \frac{\partial v^2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial z} - \frac{\partial v^3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3$$

é o *rotacional* de $\mathbf{v}$.

Resolução: Tem-se

$$\begin{aligned}
d\omega_{\mathbf{v}} &= d(v^1dx + v^2dy + v^3dz) \\
&= \frac{\partial v^1}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial v^1}{\partial z}dz\wedge dx + \frac{\partial v^2}{\partial x}dx\wedge dy \\
&+ \frac{\partial v^2}{\partial z}dz\wedge dy + \frac{\partial v^3}{\partial x}dx\wedge dz + \frac{\partial v^3}{\partial y}dy\wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial v^3}{\partial y} - \frac{\partial v^2}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial v^1}{\partial z} - \frac{\partial v^3}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y}\right)dx\wedge dy \\
&= \Omega_{\nabla\times\mathbf{v}}.
\end{aligned}$$

(c) $d\Omega_{\mathbf{v}} = (\nabla\cdot\mathbf{v})dx\wedge dy\wedge dz$, onde

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v^3}{\partial z}$$

é a *divergência* de $\mathbf{v}$.

Resolução: Tem-se

$$\begin{aligned}
d\Omega_{\mathbf{v}} &= d(v^1dy\wedge dz + v^2dz\wedge dx + v^3dx\wedge dy) \\
&= \frac{\partial v^1}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial v^2}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial v^3}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v^3}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

(d) $\nabla\times(\nabla f) = \mathbf{0}$.

Resolução: Basta notar que

$$\Omega_{\nabla\times(\nabla f)} = d\omega_{\nabla f} = d(df) = 0.$$

(e) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) = 0$.

Resolução: Basta notar que

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v})dx\wedge dy\wedge dz = d\Omega_{\nabla\times\mathbf{v}} = d(d\omega_{\mathbf{v}}) = 0.$$

3. Mostre a 1-forma

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

(definida em $E^2\setminus\{(0,0)\}$) é fechada mas não é exacta. (**Sugestão:** *Mostre primeiro que se $\omega = df$ então $\oint_\gamma \omega = 0$ para qualquer curva fechada γ*).

Resolução: Para ver que ω é fechada basta calcular a sua derivada exterior:

$$d\omega = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \wedge dx + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}dx \wedge dy = 0.$$

Seguindo a sugestão, suponhamos então que γ é uma curva fechada, e seja $\mathbf{g} :]0,1[\to E^n$ uma parametrização prolongável por continuidade a $[0,1]$ com $\mathbf{g}(1) = \mathbf{g}(0)$. Se $\omega = df$, temos portanto

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \omega &= \int_{]0,1[} \mathbf{g}^*\omega = \int_{]0,1[} \mathbf{g}^* df = \int_{]0,1[} d(\mathbf{g}^* f) = \int_{]0,1[} d(f \circ \mathbf{g}) \\ &= \int_{]0,1[} \frac{d(f\circ \mathbf{g})}{dt} dt = \int_0^1 \frac{d(f\circ \mathbf{g})}{dt} dt = f(\mathbf{g}(1)) - f(\mathbf{g}(0)) = 0.\end{aligned}$$

Para mostrar que ω não é exacta, basta portanto encontrar uma curva fechada γ tal que $\oint_\gamma \omega \neq 0$. Tomemos por exemplo a circunferência de raio 1: uma parametrização é por exemplo $\mathbf{g} :]0,2\pi[\to E^2$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

e portanto

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \omega &= \int_{]0,2\pi[} \mathbf{g}^*\omega = \int_{]0,2\pi[} -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta} d(\cos\theta) + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta} d(\operatorname{sen}\theta) \\ &= \int_{]0,2\pi[} \operatorname{sen}^2\theta d\theta + \cos^2\theta d\theta = \int_{]0,2\pi[} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

4. Calcule os integrais das formas diferenciais dadas ao longo das variedades indicadas com uma orientação à sua escolha:

   (a) $-ydx + xdy$ ao longo de $\{(x,y) \in E^2 : x^2+y^2 = 1\}$;
   Resolução: Uma parametrização é por exemplo $\mathbf{g} :]0,2\pi[\to E^2$ dada por

   $$\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

   e portanto o integral pedido vem

   $$\begin{aligned}&\int_{]0,2\pi[} \mathbf{g}^*(-ydx + xdy) = \int_{]0,2\pi[} -\operatorname{sen}\theta d(\cos\theta) + \cos\theta d(\operatorname{sen}\theta) \\ &= \int_{]0,2\pi[} \operatorname{sen}^2\theta d\theta + \cos^2\theta d\theta = \int_{]0,2\pi[} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.\end{aligned}$$

   (b) $xdx + ydy + zdz$ ao longo de $\{(x,y,z) \in E^3 : x = z, x^2+y^2 = 1\}$;
   Resolução: Uma parametrização é por exemplo $\mathbf{g} :]0,2\pi[\to E^3$ dada por

   $$\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

e portanto o integral pedido vem

$$\int_{]0,2\pi[} \mathbf{g}^*(xdx + ydy + zdz) = \int_{]0,2\pi[} \cos\theta d(\cos\theta) + \operatorname{sen}\theta d(\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta d(\cos\theta)$$
$$= \int_{]0,2\pi[} -\cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta = -\int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta = \left[\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Este resultado poderia também se obtido notando que estamos a integrar uma forma exacta ao longo de um caminho fechado:

$$xdx + ydy + zdz = d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right).$$

(c) $dx \wedge dy$ ao longo de $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$;
Resolução: Uma parametrização é por exemplo $\mathbf{g} :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to E^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

e portanto o integral pedido vem

$$\int_{]0,\pi[\times]0,2\pi[} \mathbf{g}^*(dx \wedge dy) = \int_{]0,\pi[\times]0,2\pi[} d(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi) \wedge d(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)$$
$$= \int_{]0,\pi[\times]0,2\pi[} (\cos\theta\cos\varphi d\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi d\varphi) \wedge d(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi d\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi d\varphi)$$
$$= \int_{]0,\pi[\times]0,2\pi[} \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta \wedge d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\varphi d\theta$$
$$= 2\pi\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 0.$$

(veremos mais tarde que o facto de este integral ser zero pode ser visto como uma consequência de estarmos a integrar uma forma exacta sobre uma variedade compacta: $dx \wedge dy = d(xdy)$).

(d) $zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$ ao longo de $\{(x, y, z) \in E^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$.

Resolução: Uma parametrização é por exemplo $\mathbf{g} : \{(u, v) \in E^2 : u^2 + v^2 < 1\} \to E^3$ dada por

$$\mathbf{g}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

e portanto o integral pedido vem

$$\begin{aligned}
&\int_{\{u^2+v^2<1\}} \mathbf{g}^*(zdx\wedge dy - ydx\wedge dz + xdy\wedge dz)\\
&= \int_{\{u^2+v^2<1\}} (u^2+v^2)du\wedge dv - vdu\wedge d(u^2+v^2) + udv\wedge d(u^2+v^2)\\
&= \int_{\{u^2+v^2<1\}} (u^2+v^2)du\wedge dv - 2v^2du\wedge dv + 2u^2dv\wedge du\\
&= \int_{\{u^2+v^2<1\}} -(u^2+v^2)du\wedge dv\\
&= -\int_{\{u^2+v^2<1\}} (u^2+v^2)dudv\\
&= -\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2 rd\theta dr = -2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

5. Calcule a área da superfície curva de um cone circular recto de altura $h>0$ e raio da base $a>0$.

   Resolução: Uma parametrização desta superfície é por exemplo $\mathbf{g}:]0,a[\times]0,2\pi[\to E^3$ dada por

$$\mathbf{g}(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \frac{h}{a}r\right).$$

   O *pull-back* por esta parametrização de um elemento de volume compatível com a orientação por ela induzida é

$$\mathbf{g}^*dV_2 = \sqrt{\det G(r,\theta)}dr\wedge d\theta,$$

   onde G é a matriz 2×2 dada por

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r} = \left(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,\frac{h}{a}\right)\cdot\left(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,\frac{h}{a}\right) = 1+\frac{h^2}{a^2};\\
G_{12} = G_{21} &= \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta} = \left(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,\frac{h}{a}\right)\cdot(-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) = 0;\\
G_{22} &= \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta} = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta,0)\cdot(-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta,0) = r^2.
\end{aligned}$$

   Portanto

$$\det G(r,\theta) = \begin{vmatrix} 1+\frac{h^2}{a^2} & 0\\ 0 & r^2\end{vmatrix} = r^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)$$

   e a área da superfície é

$$\int_{]0,a[\times]0,2\pi[} r\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}dr\wedge d\theta = \sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\int_0^a\int_0^{2\pi} rd\theta dr = 2\pi\frac{a^2}{2}\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}} = \pi a\sqrt{a^2+h^2}.$$

6. Escreva a área do elipsóide de semieixos $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ como um integral iterado.

   Resolução: Uma parametrização desta superfície é por exemplo $\mathbf{g}:]0,\pi[\times]0,2\pi[\to E^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta,\varphi) = (a\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, b\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, c\cos\theta).$$

O *pull-back* por esta parametrização de um elemento de volume compatível com a orientação por ela induzida é

$$\mathbf{g}^* dV_2 = \sqrt{\det G(\theta,\varphi)} d\theta \wedge d\varphi,$$

onde G é a matriz 2×2 dada por

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (a\cos\theta\cos\varphi, b\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -c\operatorname{sen}\theta) \cdot (a\cos\theta\cos\varphi, b\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -c\operatorname{sen}\theta) \\
&= a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\theta; \\
G_{12} &= G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} = (a\cos\theta\cos\varphi, b\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -c\operatorname{sen}\theta) \cdot (-a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, b\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0) \\
&= (b^2 - a^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi; \\
G_{22} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} = (-a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, b\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0) \cdot (-a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, b\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0) \\
&= a^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\det G(r,\theta) &= \begin{vmatrix} a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\theta & (b^2-a^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ (b^2-a^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi & a^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi \end{vmatrix} \\
&= a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + a^2c^2\operatorname{sen}^4\theta\operatorname{sen}^2\varphi + b^2c^2\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\varphi
\end{aligned}$$

e a área da superfície é

$$\begin{aligned}
&\int_{]0,\pi[\times]0,2\pi[} \sqrt{a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + a^2c^2\operatorname{sen}^4\theta\operatorname{sen}^2\varphi + b^2c^2\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\varphi}\, d\theta \wedge d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \sqrt{a^2b^2\cos^2\theta + a^2c^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + b^2c^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi}\, d\varphi d\theta.
\end{aligned}$$

7. Prove o Segundo Teorema de Pappus: a área de uma superfície de revolução gerada por uma curva plana é igual a $2\pi dL$, onde L é o comprimento da curva plana e d é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular a área da superfície do toro

   $$T = \left\{(x,y,z) \in E^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\right\}$$

   $(0 < r < R)$.

   Resolução: Se a curva é parametrizada por $\mathbf{c} :]0,1[\to E^2$,

   $$\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t))$$

   uma parametrização da superfície de revolução gerada pela curva é $\mathbf{g} :]0,1[\times]0,2\pi[\to E^3$ dada por

   $$\mathbf{g}(t,\varphi) = (u(t)\cos\theta, u(t)\operatorname{sen}\theta, v(t)).$$

   O *pull-back* por esta parametrização de um elemento de volume compatível com a orientação por ela induzida é

   $$\mathbf{g}^* dV_2 = \sqrt{\det G(t,\theta)} dt \wedge d\theta,$$

onde G é a matriz 2×2 dada por

$$G_{11} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = (u'\cos\theta, u'\operatorname{sen}\theta, v')\cdot(u'\cos\theta, u'\operatorname{sen}\theta, v') = (u')^2+(v')^2;$$
$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (u'\cos\theta, u'\operatorname{sen}\theta, v')\cdot(-u\operatorname{sen}\theta, u\cos\theta, 0) = 0;$$
$$G_{22} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (-u\operatorname{sen}\theta, u\cos\theta, 0)\cdot(-u\operatorname{sen}\theta, u\cos\theta, 0) = u^2.$$

Portanto

$$\det G(r,\theta) = \begin{vmatrix} (u')^2+(v')^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{vmatrix} = u^2\left((u')^2+(v')^2\right)$$

e a área da superfície é

$$\int_{]0,1[\times]0,2\pi[} \sqrt{u^2\left((u')^2+(v')^2\right)}dt\wedge d\theta = \int_0^1\int_0^{2\pi} u\sqrt{(u')^2+(v')^2}d\theta dt$$
$$= 2\pi\int_0^1 u\sqrt{(u')^2+(v')^2}dt.$$

Ora o *pull-back* de um elemento de volume da curva compatível com a parametrização $\mathbf{c}$ é

$$\sqrt{\frac{d\mathbf{c}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{c}}{dt}}dt = \sqrt{(u')^2+(v')^2}dt$$

e a coordenada u do seu centróide é portanto

$$u_C = d = \frac{1}{L}\int_{]0,1[} u\sqrt{(u')^2+(v')^2}dt = \frac{1}{L}\int_0^1 u\sqrt{(u')^2+(v')^2}dt.$$

Concluimos que a área da superfície é $2\pi dL$. No caso do toro, $d=R$ e $L=2\pi r$, pelo que a área da superfície do toro é $4\pi^2 rR$. É também fácil ver que a superfície cónica do exercício 5 se pode obter por rotação do segmento de recta unindo os pontos $(0,0)$ e (a,h), pelo que $d=\frac{a}{2}$ e $L=\sqrt{a^2+h^2}$, vindo a área do cone $2\pi\frac{a}{2}\sqrt{a^2+h^2}$ (em conformidade com o que já havíamos obtido).

8. Seja S a superfície
$$S = \left\{(x,y,z)\in E^3 : z = x^2+y^2, z\le 1\right\}.$$
Calcule:

(a) A área de S;
Resolução: Uma parametrização desta superfície é por exemplo $\mathbf{g}:]0,1[\times]0,2\pi[\to E^3$ dada por
$$\mathbf{g}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2).$$
O *pull-back* por esta parametrização de um elemento de volume compatível com a orientação por ela induzida é
$$\mathbf{g}^*dV_2 = \sqrt{\det G(r,\theta)}dr\wedge d\theta,$$

onde G é a matriz 2×2 dada por

$$G_{11} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r) = 1 + 4r^2;$$
$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r) \cdot (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) = 0;$$
$$G_{22} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) \cdot (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) = r^2.$$

Portanto

$$\det G(r,\theta) = \begin{vmatrix} 1+4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2\left(1+4r^2\right)$$

e a área da superfície é

$$V_2(S) = \int_S dV_2 = \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} r\sqrt{1+4r^2}dr \wedge d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}d\theta dr$$
$$= 2\pi\left[\frac{1}{12}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

(b) O centróide de S.

Resolução: Por simetria o centróide situa-se no eixo dos zz, i.e., $x_C = y_C = 0$. Como

$$\int_S z dV_2 = \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} r^2 r\sqrt{1+4r^2}dr \wedge d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\sqrt{1+4r^2}d\theta dr$$
$$= 2\pi\int_0^1 u\sqrt{1+4u}\frac{du}{2} = \pi\left[u\frac{1}{6}(1+4u)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \pi\int_0^1 \frac{1}{6}(1+4u)^{\frac{3}{2}}du$$
$$= \frac{\pi}{6}5^{\frac{3}{2}} - \pi\left[\frac{1}{60}(1+4u)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}5^{\frac{3}{2}} - \pi\frac{1}{60}(5)^{\frac{5}{2}} + \pi\frac{1}{60} = \frac{\pi}{12}5^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{60}$$

temos

$$z_C = \frac{1}{V_2(S)}\int_S z dV_2 = \frac{\frac{\pi}{12}5^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{60}}{\frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)} = \frac{\frac{1}{2}5^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{10}}{5^{\frac{3}{2}} - 1}.$$

9. Calcule o trabalho realizado pela força

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$

ao longo da curva

$$C = \{(x,y,z) \in E^3 : x = \cos\theta, y = \operatorname{sen}\theta, z = 2\theta, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

percorrida no sentido dos valores de z decrescentes.

Resolução: Uma parametrização desta curva é por exemplo $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\to E^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2\theta),$$

que no entanto corresponde às orientação inversa da pretendida. O integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo da curva com esta orientação é

$$
\begin{aligned}
&\int_C (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz \\
&= \int_{]0,2\pi[} (\operatorname{sen}\theta + 2\theta)d(\cos\theta) + (\cos\theta + 2\theta)d(\operatorname{sen}\theta) + (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)d(2\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2\theta - 2\theta\operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta + 2\theta\cos\theta + 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)d\theta + [2\theta\cos\theta + 2\theta\operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi} = 4\pi,
\end{aligned}
$$

pelo que o trabalho realizado é então -4π.

10. O campo de velocidades de um fluido é descrito pelo campo vectorial

$$\mathbf{v} = (x, y, -2z).$$

Supondo que o fluido possui densidade constante igual a 1, calcule a massa de fluido que atravessa a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in E^3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

por unidade de tempo no sentido dos valores de z decrescentes.

Resolução: Uma parametrização desta superfície é por exemplo $\mathbf{g} : \{(u,v) \in E^2 : u^2+v^2 < 1\} \to E^3$ dada por

$$\mathbf{g}(u,v) = (u, v, uv),$$

que no entanto corresponde às orientação inversa da pretendida: por exemplo no ponto $(0,0,0) \in M$ tem-se $\mathbf{n} = (0,0,-1) \Rightarrow \Omega_{\mathbf{n}} = -dx \wedge dy$, e

$$\mathbf{g}^*(-dx \wedge dy) = -du \wedge dv$$

(i.e., a orientação induzida pela parametrização $\mathbf{g}$ é a oposta da compatível com o elemento de volume correspondente a $\mathbf{n}$). O fluxo de $\mathbf{F}$ através de S será então o simétrico do integral de $\Omega_{\mathbf{F}}$ ao longo de S com a orientação induzida por $\mathbf{g}$:

$$
\begin{aligned}
&\int_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx - 2zdx \wedge dy \\
&= \int_{\{u^2+v^2<1\}} udv \wedge d(uv) + vd(uv) \wedge du - 2uvdu \wedge dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2<1\}} uvdv \wedge du + vudv \wedge du - 2uvdu \wedge dv \\
&= \int_{\{u^2+v^2<1\}} -4uvdu \wedge dv = -4\int_{\{u^2+v^2<1\}} uvdudv \\
&= -4\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta r d\theta dr \\
&= -4\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 0,
\end{aligned}
$$

pelo que o fluxo total através da superfície é então 0.