6^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

10 de Dezembro de 2001

1. Considere a superfície esférica de raio 1

$$S^2 = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

   (a) Escreva uma parametrização para S^2 (excepto um meridiano) usando os ângulos das coordenadas esféricas. A carta correspondente a esta parametrização é por vezes usada nos planisférios.

   (b) Escreva uma parametrização para S^2 (excepto um meridiano) usando as coordenadas cilíndricas (θ, z). A carta correspondente a esta parametrização chama-se a *projecção cilíndrica*.

   (c) Mostre que

$$dV_2 = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

   é um elemento de volume para S^2.

   (d) Calcule o *pull-back* deste elemento de volume por cada uma das parametrizações acima. Qual das projecções preserva áreas?

2. Calcule $\int_M \omega$ com uma orientação à sua escolha usando o Teorema de Stokes, onde

   (a) $\omega = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$ e $M = \left\{(x, y) \in E^2 : y = x^2, 0 < x < 1\right\}$;

   (b) $\omega = dx \wedge dy$ e $M = \left\{(x, y) \in E^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1\right\}$;

   (c) $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$ e $M = \left\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\right\}$;

   (d) $\omega = xdx \wedge dy$ e $M = \left\{(x, y, z) \in E^3 : z^2 = x^2 + y^2, 1 < z < 2\right\}$.

3. Calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ para fora da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 = 1 + 2z^2,\ 0 \le z \le 1\}.$$

   (a) Pela definição.

   (b) Usando o Teorema da Divergência.

   (c) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais.

4. Considere a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in E^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1,\ 0 < z < 1\right\}.$$

(a) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}(x,y,z) = (x + \cos(yz), y + e^{x^2+z^2}, z+1)$ através da superfície S, no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

(b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{G}(x,y,z) = (y + z, x+z, x+y)$ através de S, no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

5. (a) Usando a correspondência

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \sim dr \sim (r d\theta) \wedge (r \operatorname{sen} \theta d\varphi) \\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \sim r d\theta \sim (r \operatorname{sen} \theta d\varphi) \wedge dr \\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \sim r \operatorname{sen} \theta d\varphi \sim dr \wedge (r d\theta)
\end{aligned}$$

escreva o *Laplaciano* de f, $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$, em coordenadas esféricas.

(b) Determine todas a soluções da *equação de Laplace* $\nabla^2 f = 0$ que só dependem da coordenada radial r.

6. Um determinado processo reversível corresponde a percorrer a curva

$$C = \left\{ (V,p) : (V-2)^2 + (p-2)^2 = 1 \right\}$$

no sentido directo. Calcule o trabalho total realizado sobre o sistema durante este processo, i.e., calcule $\int_C \omega$ com a orientação indicada, onde $\omega = -p dV$.

7. O campo de velocidades de um fluido é da forma $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_\theta$, onde (r,θ,z) são coordenadas cilíndricas em E^3, e deve satisfazer as equações de $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Determine a expressão geral de $u(r)$.

8. O campo eléctrico gerado por uma carga pontual possui simetria esférica, $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$, onde r é a coordenada radial esférica, e deve satisfazer as equações de Maxwell no vácuo, $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ e $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Determine a expressão geral de $E(r)$.

9. Dado um campo eléctrico $\mathbf{E} = E^1\mathbf{e}_1 + E^2\mathbf{e}_2 + E^3\mathbf{e}_3$ e um campo magnético $\mathbf{B} = B^1\mathbf{e}_1 + B^2\mathbf{e}_2 + B^3\mathbf{e}_3$ dependentes do tempo t, define-se em E^4 com coordenadas (t,x,y,z) a 2-forma

$$F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy$$

(dita o *tensor de Faraday*). Mostre que F é fechada *sse* $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfazem as *equações de Maxwell homogéneas* $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

10. Mostre que $E^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ não é difeomorfo a E^3 (**Sugestão:** *Use o resultado do exercício* 8 *para construir uma 2-forma fechada mas não exacta em* $E^3 \setminus \{(0,0,0)\}$).