Resumos de AMIII

25 de Novembro de 2002

I. Variedades em $\mathbb{R}^n$

1. Revisões de Cálculo Diferencial

1. *Notação:* E^n designa $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ a base canónica e $x^1, \ldots, x^n$ as funções coordenadas.
2. Se $U \subset E^n$ é aberto, $\mathbf{f} : U \to E^m$ uma função (portanto $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^m)$), $\mathbf{x}_0 \in U$ e $\mathbf{v} \in E^n$ então a *derivada direccional* de $\mathbf{f}$ segundo $\mathbf{v}$ no ponto $\mathbf{x}_0$ é

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|_{t=0}.$$

3. A i-ésima *derivada parcial* de $\mathbf{f}$ é

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i} \equiv \mathbf{f}_i \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \\ \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_i^1 \\ \ldots \\ f_i^n \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{f}.$$

4. $\mathbf{f}$ diz-se *diferenciável* em $\mathbf{x}_0$ se existe uma transformação linear $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : E^n \to E^m$ (representada por uma matriz $m \times n$) tal que

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

5. Se $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ então

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}.$$

   Em particular, $D\mathbf{f}$ é representada na base canónica pela *matriz Jacobiana*

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 & \ldots & f_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^m & \ldots & f_n^m \end{bmatrix}.$$

6. $\mathbf{f}$ diz-se de classe C^1 se as derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ são funções contínuas.
7. $\mathbf{f}$ $C^1 \Rightarrow \mathbf{f}$ diferenciável.

8. Se $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to E^n$ é diferenciável, $\mathbf{f}(t) = (f^1(t), \ldots, f^n(t))$, então $\mathbf{f}$ parametriza uma curva em E^n, e

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{df^1}{dt} \\ \cdots \\ \frac{df^n}{dt} \end{bmatrix} \equiv \frac{d\mathbf{f}}{dt}$$

é um vector tangente à curva.

9. Se $f : E^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então f diz-se um *campo escalar*, e

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

pode ser identificada com o vector

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}),$$

dito o *gradiente* de f.

10. O gradiente de um campo escalar é ortogonal aos conjuntos de nível do campo.

11. Se $\mathbf{f} : U \subset E^n \to V \subset E^m$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in U$, e $\mathbf{g} : V \subset E^m \to E^p$ é diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, então $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : U \subset E^n \to E^p$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ e

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Em coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ em E^n e $(y^1, \ldots, y^m)$ em E^m, tem-se

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g^i}{\partial y^k} \frac{\partial f^k}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} g^i_k f^k_i$$

(*regra da cadeia*).

12. Derivadas parciais de ordem superior:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = f_{ji}.$$

f diz-se de classe C^2 se todas as derivadas parciais de segunda ordem são funções contínuas.

13. *Lema de Schwarz:* $f\ C^2 \Rightarrow f_{ij} = f_{ji}$.

2. Função Inversa e Função Implícita

1. O *jacobiano* da função diferenciável $\mathbf{f} : E^n \to E^n$ é o campo escalar

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

2. *Teorema da Função Inversa:* Seja $\mathbf{f} : U \subset E^n \to E^n$ uma função de classe C^1 e $\mathbf{x}_0 \in U$ tal que $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Então $\mathbf{f}$ é *localmente C^1-invertível, i.e.*, existem abertos $V \ni \mathbf{x}_0$ e $W \ni \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tais que $\mathbf{f} : V \to W$ possui inversa C^1 $\mathbf{f}^{-1} : W \to V$. Além disso, $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in V$.

3. *Teorema da Função Implícita:* Seja $\mathbf{F} : E^{n+m} \to E^m$ uma função de classe C^1 e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in E^{n+m}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ e $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $U \times V \ni (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ e uma função de classe C^1 $\mathbf{f} : U \subset E^n \to V \subset E^m$ tais que
$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$
4. Nas condições do Teorema da Função Implícita, a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{x}_0$ pode ser calculada a partir de
$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

3. Variedades Diferenciáveis

1. Um conjunto $M \subset E^n$ é uma *variedade diferenciável de dimensão* $m \in \{0, \ldots, n\}$ (e classe C^q, $q \geq 1$) se para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função de classe C^q $\mathbf{F} : U \to E^{n-m}$ tais que
   i. $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$;
   ii. $\operatorname{rank} D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = n - m$ (i.e., é máximo) para todo o $\mathbf{x} \in U$.
2. Uma variedade de dimensão 0 é simplesmente um conjunto do pontos isolados; uma variedade de dimensão n é simplesmente um conjunto aberto.
3. $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão m (e classe C^q) *sse* para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função C^q $\mathbf{f} : E^m \to E^{m-n}$ tais que
$$M \cap U = \operatorname{Graf}(\mathbf{f}) \cap U.$$
4. Um vector $\mathbf{v} \in E^n$ é um *vector tangente* à variedade M no ponto $\mathbf{x}_0$ se existe uma função $\mathbf{g} :] - \varepsilon, \varepsilon[\to M$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$ e $\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \mathbf{v}$.
5. O conjunto $T_{\mathbf{x}_0}M$ de todos os vectores tangentes à variedade M em $\mathbf{x}_0$ é um espaço vectorial de dimensão m, dito o *espaço tangente* a M no ponto $\mathbf{x}_0$. O seu complemento ortogonal $T_{\mathbf{x}_0}^{\perp}M$ é um espaço vectorial de dimensão $n - m$, dito o *espaço normal* a M no ponto $\mathbf{x}_0$.
6. Se $M = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ numa vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ então
$$T_{\mathbf{x}_0}^{\perp}M = \operatorname{span}\{\nabla F^1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla F^m(\mathbf{x}_0)\}.$$
7. *Teorema dos Extremos Condicionados:* Sejam $f : E^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $M \subset E^n$ uma variedade m-dimensional. Se a restrição de f a M tem um extremo local em $\mathbf{x}_0 \in M$ então $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in T_{\mathbf{x}_0}^{\perp}M$.
8. *Regra dos Multiplicadores de Lagrange:* Nas condições do teorema anterior, existem constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ (os *multiplicadores de Lagrange*) tais que
$$\nabla(f + \lambda_1 F^1 + \ldots + \lambda_{n-m} F^{n-m})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

II. Integração em $\mathbb{R}^n$

1. Medida de Lebesgue

1. Um *intervalo limitado* $I \subset E^n$ é um conjunto da forma $I = J_1 \times \ldots \times J_n$, onde cada J_k é um intervalo de extremos $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Define-se a *medida* (n-dimensional) de um intervalo limitado através de

$$V_n(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

2. Um *conjunto elementar limitado* $E \subset E^n$ é uma união finita de intervalos limitados disjuntos,

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} I_k.$$

Define-se a *medida* (n-dimensional) de um conjunto elementar limitado através de

$$V_n(E) = \sum_{k=1}^{N} V_n(I_k).$$

3. Dado um subconjunto qualquer $A \subset E^n$, define-se a sua *medida exterior* (n-dimensional) como sendo

$$\overline{V}_n(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(I_k) : I_k \text{ intervalo limitado }, A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \right\}$$

(pode ser $+\infty$).

4. Propriedades da medida exterior:
   i. $\overline{V}_n(\varnothing) = 0$;
   ii. $A \subset B \Rightarrow \overline{V}_n(A) \leq \overline{V}(B)$;
   iii. E elementar limitado $\Rightarrow \overline{V}_n(E) = V(E)$;
   iv. $\overline{V}_n(\mathbf{a} + A) = \overline{V}_n(A) \ \forall \mathbf{a} \in E^n$;
   v. $A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \Rightarrow \overline{V}_n(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{V}_n(A_k)$.

5. Uma família $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de E^n diz-se uma *cobertura* de $A \subset E^n$ se

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

A cobertura diz-se *aberta* se todos os U_i são abertos. Uma *subcobertura* é uma subfamília $\{U_i\}_{i \in J}$ $(J \subset I)$ que é ainda uma cobertura de A.

6. *Teorema de Heine-Borel:* $K \subset E^n$ é *compacto* (i.e., limitado e fechado) *sse* toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.

7. A *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e b é

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

8. Um conjunto $A \subset E^n$ diz-se *mensurável com medida finita* se

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{E \text{ elementar limitado}} : \overline{V}_n(A \Delta E) < \varepsilon.$$

Se A é mensurável com medida finita, define-se a sua *medida* (n-dimensional) mediante $V_n(A) = \overline{V}_n(A) < +\infty$.

9. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de E^n diz-se uma *álgebra de conjuntos* se
   i. $\varnothing \in \mathcal{A}$;
   ii. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \equiv E^n \setminus A \in \mathcal{A}$;
   iii. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in A$.

   Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se uma *σ-álgebra* se
$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$
10. $A \subset E^n$ diz-se *mensurável* se $A \cap [-L, L]^n$ é mensurável com medida finita $\forall_{L>0}$. Se A é mensurável define-se a sua *medida* (n-dimensional) como $V_n(A) = \overline{V}_n(A)$ (pode ser $+\infty$).
11. Seja $\mathcal{M}$ a família dos subconjuntos mensuráveis de E^n. Então:
   i. $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra;
   ii. $V_n : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ é *σ-aditiva*, i.e., se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ são disjuntos 2 a 2 então
$$V_n(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(A_k).$$
12. Qualquer conjunto de medida exterior nula é mensurável. Qualquer conjunto aberto/fechado é mensurável.
13. Uma função $f : E^n \to \mathbb{R}$ diz-se *mensurável* se $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$ para qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
14. $\mathbf{f} : E^n \to E^m$ é contínua *sse* para qualquer aberto $U \subset E^m$ a imagem inversa $\mathbf{f}^{-1}(U) \subset E^n$ é um aberto.
15. Qualquer função contínua é mensurável.
16. Se $f : E^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, define-se
$$f^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}, \quad f^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -f(\mathbf{x}) & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$
   (note-se que $f^+, f^- \geq 0, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$).
17. i. f mensurável $\Rightarrow f^+, f^-$ mensuráveis.
   ii. f, g mensuráveis $\Rightarrow f \pm g, fg$ mensuráveis.
   iii. $f_1, f_2, \ldots$ mensuráveis e $f(\mathbf{x}) = \lim_{k\to+\infty} f_k(\mathbf{x})$ existe $\Rightarrow f$ mensurável.
18. Se $A \subset E^n$, a *função característica* de A é a função $\chi_A : E^n \to \mathbb{R}$ dada por
$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \mathbf{x} \in A \\ 0 & \text{se} \quad \mathbf{x} \notin A \end{cases}.$$
19. A função $s : E^n \to \mathbb{R}$ diz-se *simples* se existem conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_n \subset E^n$ e números reais $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que
$$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}.$$
   s é mensurável *sse* $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{M}$.

20. Se $f : E^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, existe uma sucessão $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples tais que
$$\lim_{k\to+\infty} s_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),\ \forall_{\mathbf{x}\in E^n}.$$
Além disso:
    i. Se f é mensurável, as funções s_k podem ser escolhidas mensuráveis;
    ii. Se $f \geq 0$, podemos escolher $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ monótona crescente:
$$0 \leq s_1(\mathbf{x}) \leq s_2(\mathbf{x}) \leq \dots,\ \forall_{\mathbf{x}\in E^n}.$$

2. Integral de Lebesgue

1. Se $s : E^n \to [0, +\infty[$ é simples e mensurável,
$$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i} \qquad c_i \in \mathbb{R}^+, A_i \in \mathcal{M},$$
define-se o seu *integral* como sendo
$$\int_{E^n} s dV_n = \sum_{i=1}^{N} c_i V(A_i)$$
(pode ser $+\infty$).
2. Se $f : E^n \to [0, +\infty[$ é mensurável, define-se
$$\int_{E^n} f dV_n = \sup\{\int_{E^n} s dV_n : 0 \leq s \leq f \text{ é simples e mensurável }\}$$
(pode ser $+\infty$). Se
$$\int_{E^n} f dV_n < +\infty$$
a função f diz-se *integrável*.
3. Uma função mensurável $f : E^n \to \mathbb{R}$ diz-se *integrável* se f^+, f^- o são. Nesse caso, define-se
$$\int_{E^n} f dV_n = \int_{E^n} f^+ dV_n - \int_{E^n} f^- dV_n.$$
4. Se $A \in \mathcal{M}$, f diz-se *integrável em A* se $f\chi_A$ é integrável, caso em que se define
$$\int_A f dV_n = \int_{E^n} f\chi_A dV_n.$$
O conjunto das funções integráveis em A designa-se por $L^1(A)$.
5. Seja $A \in \mathcal{M}$. Então
    i. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é mensurável e limitada e $V_n(A) < +\infty$ então $f \in L^1(A)$;
    ii. Se $f, g \in L^1(A)$ e $f \leq g$ então
$$\int_A f dV_n \leq \int_A g dV_n.$$

iii. Se $V_n(A) = 0$ então $\int_A f dV_n = 0$.

iv. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e f, g $L^1(A)$ então $af + bg \in L^1(A)$ e

$$\int_A (af + bg) dV_n = a \int_A f dV_n + b \int_A g dV_n.$$

v. $f \in L^1(A)$ *sse* $|f| \in L^1(A)$, e

$$\left| \int_A f dV_n \right| \leq \int_A |f| dV_n.$$

6. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável então $f \in L^1([a, b])$ e

$$\int_{[a,b]} f dV_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

3. Teorema de Fubini, Mudança de Variáveis e Aplicações

1. Se $P(\mathbf{x})$ é uma proposição que depende de $\mathbf{x} \in E^n$, dizemos que $P(\mathbf{x})$ é *verdadeira quase em toda a parte* (q.t.p.) se

$$V_n(\{\mathbf{x} \in E^n : P(\mathbf{x}) \text{ é falsa }\}) = 0.$$

2. *Teorema de Fubini:* Se $A \subset E^n$ e $B \subset E^n$ são intervalos quaisquer e $f \in L^1(A \times B)$ então:

   i. A função $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^1(A)$ para quase todo o $\mathbf{y} \in B$;

   ii. A função $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^1(B)$ para quase todo o $\mathbf{y} \in A$;

   iii. A função $\mathbf{y} \mapsto \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \in L^1(B)$;

   iv. A função $\mathbf{x} \mapsto \int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \in L^1(A)$;

   v.
$$\int_{A \times B} f = \int_A \left[\int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} = \int_B \left[\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}.$$

3. Se $A \in \mathcal{M}$ é limitado e é dada uma *função densidade de massa* $\rho \in L^1(A)$, define-se:

   i. O *volume* n-dimensional de A:

$$V = V_n(A) = \int_A dV_n.$$

   ii. A *massa* de A:

$$M = \int_A \rho dV_n.$$

   iii. A coordenada k do *centro de massa* de A:

$$x^k_{CM} = \frac{1}{M} \int_A x^k \rho dV_n.$$

   iv. A coordenada k do *centróide* de A:

$$x^k_C = \frac{1}{V} \int_A x^k dV_n.$$

v. O *momento de inércia* de A em relação a um determinado eixo:

$$I = \int_A d^2 \rho dV_n,$$

onde $d(\mathbf{x})$ é a distância do ponto $\mathbf{x}$ ao eixo.

4. Seja $U \subset E^n$ aberto; $\mathbf{g} : U \to E^n$ diz-se uma *mudança de coordenadas* se é uma injecção C^1 com $\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0 \ \forall_{\mathbf{x}\in U}$ (em particular, $\mathbf{g}$ tem inversa C^1).
5. *Teorema de Mudança de Variáveis:* Se $\mathbf{g} : U \subset E^n \to E^n$ é uma mudança de coordenadas e $f \in L^1(\mathbf{g}(U))$ então $f \circ g \in L^1(U)$ e

$$\int_{\mathbf{g}(U)} f(\mathbf{x}) dV_n(\mathbf{x}) = \int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \left|\det D\mathbf{g}(\mathbf{t})\right| dV_n(\mathbf{t}).$$

6. O *paralelepípedo* de lados $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in E^n$ é o conjunto fechado (portanto mensurável)

$$P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]\}.$$

As propriedades da medida de Lebesgue implicam que

$$V_n(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)) = \left|\det[\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n]\right|.$$

7. *Coordenadas Polares* em E^2: São as coordenadas $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta) = r.$$

8. *Coordenadas Cilíndricas* em E^3: São as coordenadas $(r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times\mathbb{R}$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, z) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, z).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta, z) = r.$$

9. *Coordenadas Esféricas* em E^3: São as coordenadas $(r, \theta, \varphi) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r \cos\theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = r^2 \operatorname{sen}\theta.$$

4. Teoremas de Convergência

1. *σ-aditividade do integral:* Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ com $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$, $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ e $f \geq 0$ mensurável. Então

$$\int_A f dV_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f dV_n.$$

2. Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ com $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ e $f \geq 0$ mensurável. Então

$$\int_A f dV_n = \lim_{k \to +\infty} \int_{A_k} f dV_n.$$

3. $\frac{1}{x^\alpha} \in L^1([1, +\infty[)$ *sse* $\alpha > 1$.
4. $e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
5. $\frac{1}{x^\alpha} \in L^1(]0, 1])$ *sse* $\alpha < 1$.
6. *Teorema da Convergência Monótona de Levi:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A tais que

$$0 \leq f_(\mathbf{x}) \leq f_2(\mathbf{x}) \leq \ldots \quad \forall_{\mathbf{x} \in A}.$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall_{\mathbf{x} \in A}$$

então

$$\int_A f(\mathbf{x}) = \lim_{k \to +\infty} \int_A f_k(\mathbf{x})$$

(pode ser $+\infty$).
7. *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall_{\mathbf{x} \in A}$$

e existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$|f_k(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \forall_{\mathbf{x} \in A}$$

então $f \in L^1(A)$ e

$$\int_A f(\mathbf{x}) = \lim_{k \to +\infty} \int_A f_k(\mathbf{x}).$$

8. *Regra de Leibniz:* Seja $A \subset E^n$ mensurável e $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}, y)$ é integrável em $\mathbf{x}$ para todo o $y \in \mathbb{R}$ e diferenciável em y para quase todo o $\mathbf{x} \in A$. Se existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) \right| \leq g(\mathbf{x})$$

para y numa vizinhança de $y_0 \in \mathbb{R}$ então a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y) dV_n(\mathbf{x})$$

é diferenciável em y_0 e

$$F'(y_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) dV_n(\mathbf{x}).$$

III. Formas Diferenciais

1. Covectores

1. O *dual* de E^n é

$$(E^n)^* = \{\omega : E^n \to \mathbb{R} : \omega \text{ é linear}\}.$$

Os elementos de $(E^n)^*$ dizem-se *1-covectores*.

2. $(E^n)^*$ é um espaço vectorial de dimensão n. Uma base para $(E^n)^*$ é

$$\{dx^1, \ldots, dx^n\}$$

onde o 1-covector dx^i é definido por

$$dx^i \left(v^1 \mathbf{e}_1 + \ldots + v^n \mathbf{e}_n\right) = v^i$$

(ou seja, $dx^i (\mathbf{e}_j) = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário).

3. Um *k-tensor* (covariante) é uma aplicação $T : (E^n)^k \to \mathbb{R}$ multilinear, i.e., tal que

$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k);$$
$$T(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = \lambda T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in E^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$). $T^k(E^n)$ designa o conjunto de todos os k-tensores em E^n.

4. Um k-tensor $\omega \in T^k(E^n)$ diz-se *alternante*, ou um *k-covector*, se

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in E^n$, $i, j = 1, \ldots, n$). $\Lambda^k(E^n)$ designa o conjunto de todos os k-covectores em E^n.

5. $T^k(E^n)$ é um espaço vectorial e $\Lambda^k(E^n)$ é um subespaço vectorial de $T^k(E^n)$.
6. Se $S \in T^k(E^n)$ e $T \in T^l(E^n)$, o seu *produto tensorial* $S \otimes T \in T^{k+l}(E^n)$ é dado por

$$S \otimes T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l) = S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) T(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l)$$

($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l \in E^n$).

7. *Propriedades do produto tensorial:* Se S, T, U são tensores e $\lambda \in \mathbb{R}$ então
   i. $(S + T) \otimes U = S \otimes U + T \otimes U$;
   ii. $S \otimes (T + U) = S \otimes T + S \otimes U$;
   iii. $(\lambda S) \otimes T = \lambda(S \otimes T) = S \otimes (\lambda T)$;
   iv. $S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U$;

v. $S \otimes T \neq T \otimes S$.

8. $\dim\left(T(^k(E^n)\right) = n^k$, e uma base é $\left\{dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}\right\}_{i_1,\ldots,i_k=1}^n$.

9. Se $T \in T^k\left(E^n\right)$, define-se

$$\mathrm{Alt}(T)\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\right) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}\right)$$

10. *Propriedades de* Alt*:*
    i. Se $T \in T^k\left(E^n\right)$ então $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k\left(E^n\right)$;
    ii. $\mathrm{Alt} : T^k\left(E^n\right) \to \Lambda^k\left(E^n\right)$ é linear;
    iii. Se $\omega \in \Lambda^k\left(E^n\right)$ então $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$.
    (Por outras palavras, $\mathrm{Alt} : T^k\left(E^n\right) \to \Lambda^k\left(E^n\right)$ é uma projecção).

11. Se ω é um k-covector e η é um l-covector, o seu *produto exterior* é o (k+l)-covector

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

12. *Propriedades do produto exterior:* Se ω, η, α e β são covectores de graus apropriados então
    i. $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$;
    ii. $\omega \wedge (c\eta) = c(\omega \wedge \eta)$ com $c \in \mathbb{R}$;
    iii. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ para $\omega \in \Lambda^k\left(E^n\right)$,$\eta \in \Lambda^l\left(E^n\right)$;
    iv. $\omega \wedge (\alpha \wedge \beta) = (\omega \wedge \alpha) \wedge \beta$.

13. $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = k!\,\mathrm{Alt}\left(dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}\right)$

14. $\dim \Lambda^k\left(E^n\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, e uma base é $\left\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$.

2. Formas diferenciais

1. Uma *k-forma diferencial* C^q em E^n é uma função C^q $\omega : E^n \to \Lambda^k\left(E^n\right)$ (i.e., $\omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^k\left(E^n\right)$ para todo o $\mathbf{x} \in E^n$). O conjunto das k-formas C^∞ em E^n designa-se por $\Omega^k\left(E^n\right)$.

2. Se $\mathbf{f} : E^n \to E^m$ é C^∞ e $\omega \in \Omega^k\left(E^m\right)$ então o *pull-back* de ω por $\mathbf{f}$ é a k-forma $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k\left(E^n\right)$ definida por

$$\mathbf{f}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k)$$

para $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in E^n$.

3. *Propriedades do pull-back:* Se ω e η são formas de graus apropriados então
    i. $\mathbf{f}^*(\omega + \eta) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\eta$;
    ii. $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$.

4. Se $\omega \in \Omega^k\left(E^m\right)$ é uma k-forma,

$$\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

a sua *derivada exterior* é a (k+1)-forma

$$d\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

5. *Propriedades da derivada exterior:* Se ω e η são formas de graus apropriados então
   i. $d(\omega+\eta)=d\omega+d\eta$;
   ii. $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta$, onde $\omega\in\Omega^k\left(E^n\right)$;
   iii. $d(d\omega)=0$ (abreviadamente, $d^2=0$);
   iv. $d(\mathbf{f}^*\omega)=\mathbf{f}^*(d\omega)$, onde $\mathbf{f}:E^m\to E^n$ é C^∞.
6. Por definição, $\Lambda^0\left(E^n\right)=\mathbb{R}$ e portanto as 0-formas $\Omega^0\left(E^n\right)$ são as funções C^∞ $g:E^n\to\mathbb{R}$. Se ω é uma k-forma e $\mathbf{f}:E^m\to E^n$ é C^∞ tem-se
   i. $g\wedge\omega=g\omega$;
   ii. $\mathbf{f}^*g=g\circ\mathbf{f}$;
   iii. $dg=\dfrac{\partial g}{\partial x^1}dx^1+\ldots+\dfrac{\partial g}{\partial x^n}dx^n$.

   (em particular, $d(x^i)=dx^i$, o que justifica esta notação).
7. $\omega\in\Omega^k\left(E^n\right)$ diz-se *fechada* se $d\omega=0$.
8. $\omega\in\Omega^k\left(E^n\right)$ diz-se *exacta* se existe uma forma $\eta\in\Omega^{k-1}\left(E^n\right)$ tal que $\omega=d\eta$ (η diz-se um *potencial* para ω).
9. ω exacta $\Rightarrow$ ω fechada.
10. $A\subset E^n$ diz-se *em estrela* se existe um ponto $\mathbf{x}_0\in A$ (dito o *centro*) tal que $[\mathbf{x}_0,\mathbf{x}]\subset A$ para todo o $\mathbf{x}\in A$, onde
$$[\mathbf{x}_0,\mathbf{x}]=\{\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0):t\in[0,1]\}$$
designa o segmento de recta de extremos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$.
11. *Lema de Poincaré:* Seja $\omega\in\Omega^k(U)$, onde $U\subset E^n$ é aberto. Se U é em estrela e ω é fechada, então ω é exacta.

IV. Integração em Variedades

1. Parametrizações, Cartas e Orientabilidade

1. Seja $M\subset E^n$ uma variedade de dimensão m, $\mathbf{x}\in M$ e $U\ni\mathbf{x}$ uma vizinhança aberta. $\mathbf{g}:V\subset E^m\to M\cap U$ diz-se uma *parametrização* de classe C^q de $M\cap U$ se é uma bijecção de classe C^q com $\mathbf{g}^{-1}:M\cap U\to V$ contínua e $\operatorname{rank}D\mathbf{g}=m$.
2. $M\subset E^n$ é uma variedade de dimensão m e classe C^q *sse* para todo o $\mathbf{x}\in M$ existe uma vizinhança aberta $U\ni\mathbf{x}$ e uma parametrização de classe C^q $\mathbf{g}:V\subset E^m\to M\cap U$. Além disso, as colunas de $D\mathbf{g}(\mathbf{t})$ formam uma base para $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$.
3. Se $\mathbf{g}:V\subset E^m\to M\cap U$ é uma parametrização, a função contínua $\mathbf{g}^{-1}:M\cap U\to V$ diz-se uma *carta local*.
4. Sejam $\mathbf{g}:V\subset E^m\to M\cap U$ e $\mathbf{h}:W\subset E^m\to M\cap U$ duas parametrizações, e $\varphi:M\cap U\to V$ e $\psi:M\cap U\to W$ as respectivas cartas locais. Então a mudança de carta local $\psi\circ\mathbf{g}:V\to W$ é de classe C^q e $\det D\psi\circ\mathbf{g}\neq0$.
5. Seja $\mathbf{f}:V\subset E^m\to W\subset E^m$ de classe C^q invertível com inversa de classe C^q. Diz-se que $\mathbf{f}$ *preserva orientações* se $\det D\mathbf{f}>0$, e que $\mathbf{f}$ *inverte orientações* se $\det D\mathbf{f}<0$.
6. Uma variedade $M\subset E^n$ diz-se *orientável* se pode ser parametrizada por forma a que todas as respectivas mudanças de cartas locais preservem orientações. Uma *orientação* de M é simplesmente uma escolha de um sistema de parametrizações nestas condições.

2. Integrais de Formas Diferenciais

1. Se $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$ é uma parametrização e $\omega \in \Omega^m\left(E^n\right)$, define-se o integral de ω ao longo de $M \cap U$ com a orientação induzida por $\mathbf{g}$ através de
$$\int_{\mathbf{g}(V)} \omega = \int_V \mathbf{g}^* \omega \left(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\right) dt^1 \ldots dt^m.$$
Resulta desta definição que
$$\int_V f(\mathbf{t}) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m = \int_V f(\mathbf{t}) dt^1 \ldots dt^m,$$
e portanto
$$\int_{\mathbf{g}(V)} \omega = \int_V \mathbf{g}^* \omega.$$
2. A m-forma $dV_m \in \Omega^m\left(E^n\right)$ diz-se um *elemento de volume* para a variedade de dimensão m $M \subset E^n$ se
$$\left|dV_m(\mathbf{x})\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\right)\right| = V_m\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\right) = \sqrt{\det G}$$
para quaisquer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in T_{\mathbf{x}}M$ e $\mathbf{x} \in M$, onde G é a matriz $m \times m$ dada por $G_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$.
3. Se $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$ é uma parametrização e $dV_m \in \Omega^m\left(E^n\right)$ é um elemento de volume para M, então
$$\mathbf{g}^* dV_m = \pm\sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$$
onde a matriz $m \times m$ $G(\mathbf{t})$ é dada por
$$G_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j}.$$
O elemento de volume diz-se *compatível* com a orientação induzida por $\mathbf{g}$ se o sinal acima é positivo, ou, equivalentemente, se
$$dV_m\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^m}\right) > 0.$$
4. Se $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$ é uma parametrização e $dV_m \in \Omega^m\left(E^n\right)$ é um elemento de volume para M compatível com a orientação induzida por $\mathbf{g}$, define-se o *volume m-dimensional de* $M \cap U$ como
$$\begin{aligned} V_m(M \cap U) &= \int_{M \cap U} dV_m = \int_V \mathbf{g}^* dV_m = \int_V \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m \\ &= \int_V \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \ldots dt^m. \end{aligned}$$
Note-se que este integral é independente da orientação induzida por $\mathbf{g}$.
5. Se $f : E^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$ é uma parametrização e $dV_m \in \Omega^m\left(E^n\right)$ é um elemento de volume para M compatível com a orientação induzida por $\mathbf{g}$, define-se o integral de f ao longo de $M \cap U$ como
$$\begin{aligned} \int_{M \cap U} f dV_m &= \int_V \mathbf{g}^*(f dV_m) = \int_V f(g(\mathbf{t}))\sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m \\ &= \int_V f(g(\mathbf{t}))\sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \ldots dt^m. \end{aligned}$$
Note-se que este integral é independente da orientação induzida por $\mathbf{g}$.

6. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão m limitada e é dada uma *função densidade de massa por unidade de volume m-dimensional* $\sigma : E^n \to [0, +\infty[$, define-se:
   i. O *volume* m-dimensional de M:
   $$V = V_m(M) = \int_M dV_m.$$
   ii. A *massa* de M:
   $$M = \int_M \sigma dV_m.$$
   iii. A coordenada k do *centro de massa* de M:
   $$x^k_{CM} = \frac{1}{M} \int_M x^k \sigma dV_m.$$
   iv. A coordenada k do *centróide* de M:
   $$x^k_C = \frac{1}{V} \int_M x^k dV_m.$$
   v. O *momento de inércia* de M em relação a um determinado eixo:
   $$I = \int_M d^2 \sigma dV_m,$$
   onde $d(\mathbf{x})$ é a distância do ponto $\mathbf{x}$ ao eixo.
7. Se $\mathbf{F} : E^n \to E^n$ é um campo vectorial C^∞, definem-se $\omega_\mathbf{F} \in \Omega^1(E^n)$ e $\Omega_\mathbf{F} \in \Omega^{n-1}(E^n)$ através das fórmulas
   $$\begin{aligned}\omega_\mathbf{F} =& F^1 dx^1 + \ldots + F^n dx^n;\\ \Omega_\mathbf{F} =& F^1 dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n - \ldots + (-1)^{n-1} F^n dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.\end{aligned}$$
8. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão 1, $\boldsymbol{\tau} : M \to E^n$ um vector tangente unitário e $\mathbf{F} : E^n \to E^n$ um campo vectorial C^∞,
   $$\int_M \omega_\mathbf{F} = \int_M \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dV_1,$$
   onde a orientação de M é definida por $\boldsymbol{\tau}$. Este integral diz-se o *integral de linha* de $\mathbf{F}$ ao longo de M na direcção determinada por $\boldsymbol{\tau}$; no caso em que $\mathbf{F}$ é uma força, tem a interpretação física do trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre uma partícula que percorre M na direcção determinada por $\boldsymbol{\tau}$.
9. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão $n-1$ e $\mathbf{n} : M \to E^n$ um vector normal unitário, $dV_{n-1} = \Omega_\mathbf{n}$ é um elemento de volume para M.
10. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão $n-1$, $\mathbf{n} : M \to E^n$ um vector normal unitário e $\mathbf{F} : E^n \to E^n$ um campo vectorial C^∞,
   $$\int_M \Omega_\mathbf{F} = \int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_{n-1},$$
   onde a orientação de M é definida por $dV_{n-1} = \Omega_\mathbf{n}$. Este integral diz-se o *fluxo* de $\mathbf{F}$ através de M na direcção determinada por $\mathbf{n}$; no caso em que $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$, onde ρ e $\mathbf{v}$ são a densidade e velocidade de um fluido, tem a interpretação física da massa de fluido que atravessa M na direcção determinada por $\mathbf{n}$ por unidade de tempo.

11. Para verificar se uma determinada parametrização $\mathbf{g} : V \subset E^{n-1} \to M \cap U \subset E^n$ induz a orientação compatível com o elemento de volume $dV_{n-1} = \Omega_{\mathbf{n}}$ (ou seja, se o integral de $\Omega_{\mathbf{F}}$ fornece o fluxo de $\mathbf{F}$ na direcção de $\mathbf{n}$), basta verificar se

$$\mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{n}} = f(\mathbf{t})dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-1}$$

com $f > 0$ (basta verificar num ponto particular). Alternativamente, basta verificar se

$$\det\left(\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^{n-1}}\right) > 0.$$

Se $n = 3$, isto é equivalente a verificar se

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2} = f(\mathbf{t})\mathbf{n}$$

com $f > 0$.

12. Se $\mathbf{g} : V \subset E^2 \to M \cap U \subset E^3$ é uma parametrização e dV_2 é um elemento de volume para M compatível com a orientação induzida por esta parametrização, então

$$\mathbf{g}^*dV_2 = \left\|\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}\right\| dt^1 \wedge dt^2.$$

Em particular, o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F} : E^3 \to E^3$ através de $M \cap U$ na direcção de $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}$ é dado por

$$\int_V \mathbf{F}\left(\mathbf{g}\left(t^1, t^2\right)\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}\right) dt^1 \wedge dt^2 = \int_V \mathbf{F}\left(\mathbf{g}\left(t^1, t^2\right)\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}\right) dt^1 dt^2.$$

13. $M \subset E^n$ diz-se uma *variedade com bordo* de dimensão k (e classe C^q) se $M = \dot{M} \cup \partial M$, onde $\dot{M}$ é uma variedade de dimensão k (e classe C^q), ∂M é uma variedade de dimensão $k-1$ (e classe C^q), dita o *bordo* de M, e para todo o $\mathbf{x} \in \partial M$ existe um aberto $U \ni \mathbf{x}$ e uma aplicação de classe C^q $\mathbf{g} : V \cap \{t^1 \leq 0\} \to M \cap U$ tais que $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}$, $\mathbf{g}(V \cap \{t^1 < 0\}) = \dot{M} \cap U$ e $\mathbf{g}(V \cap \{t^1 = 0\}) = \partial M \cap U$. M diz-se orientável se $\dot{M}$ é orientável, e se $\omega \in \Omega^k\left(E^n\right)$ define-se

$$\int_M \omega = \int_{\dot{M}} \omega.$$

Se $\mathbf{g}$ determina a orientação de M, a *orientação induzida por* $\mathbf{g}$ em ∂M é determinada por $\mathbf{h} : W \subset E^{k-1} \to E^n$ dada por $\mathbf{h}(u^1, \ldots, u^{k-1}) = \mathbf{g}(0, u^1, \ldots, u^{k-1})$.

14. *Teorema de Stokes (Teorema Fundamental do Cálculo):* Se $M \subset E^n$ é uma variedade com bordo compacta orientável de dimensão k e $\omega \in \Omega^{k-1}\left(E^n\right)$ então

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega,$$

onde ∂M tem a orientação induzida pela de M.

15. Se M é uma variedade de dimensão k (sem bordo) compacta orientável e $\omega \in \Omega^{k-1}\left(E^n\right)$ então

$$\oint_M d\omega = 0$$

($\oint$ significa apenas que a região de integração é uma variedade compacta).

16. *Notação:* Se $\mathbf{F} : E^n \to E^n$ é um campo vectorial e M é uma variedade de dimensão 1 com parametrização $\mathbf{g} :]0,1[\to E^n$, é habitual escrever

$$\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_M \omega_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) dt.$$

17. *Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:* Se $f : E^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar e M é uma variedade de dimensão 1 com bordo parametrizada por $\mathbf{g} : [0,1] \to E^n$, com $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ e $\mathbf{g}(1) = \mathbf{b}$, então

$$\int_M \nabla f \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}).$$

18. Se $\mathbf{F} : E^n \to E^n$ é um campo vectorial de classe C^1, a sua *divergência* é o campo escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial F^n}{\partial x^n}.$$

19. *Teorema da Divergência:* Se $\mathbf{F} : E^n \to E^n$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma variedade com bordo de dimensão n (i.e., um conjunto compacto $M \subset E^n$ cuja fronteira é uma variedade), então

$$\int_M \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV_n = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_{n-1},$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária *exterior*.

3. Cálculo Vectorial em E^3

1. Se $\mathbf{F} : E^3 \to E^3$ é um campo vectorial de classe C^1, o seu *rotacional* é o campo vectorial

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right).$$

2. *Teorema de Stokes para Campos Vectoriais:* Se $\mathbf{F} : E^3 \to E^3$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma superfície com bordo, então

$$\int_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dg},$$

onde ∂M deve ser percorrido no sentido tal que o produto externo do vector tangente ao bordo pela normal unitária $\mathbf{n}$ aponte *para fora* da superfície.

3. *Regra da Mão Direita:* Uma maneira simples de recordar a relação entre as orientações da superfície e do seu bordo no Teorema de Stokes é a seguinte: desenhando um pequeno quadrado na superfície tal que um dos seus lados é um pedaço do bordo, a orientação correcta do bordo é a que induz a circulação ao longo dos lados do quadrado que fornece a normal unitária $\mathbf{n}$ por aplicação da regra da mão direita (fechando a mão direita no sentido da circulação no quadrado, o polegar aponta na direcção da normal).

4. Se $f : E^3 \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^2, então

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

5. Se $\mathbf{F} : E^3 \to E^3$ é um campo vectorial de classe C^2, então

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

6. *Lema de Poincaré para Campos Vectoriais:* Se $\mathbf{F} : U \subset E^3 \to E^3$ é um campo vectorial de classe C^2 e U é um conjunto em estrela então:
   i. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f$ para algum campo escalar $f : U \to \mathbb{R}$ (dito um *potencial escalar* para $\mathbf{F}$);
   ii. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ para algum campo escalar $\mathbf{A} : U \to E^3$ (dito um *potencial vector* para $\mathbf{F}$).
7. *Dicionário Formas/Campos em E^3*:
   i. Produtos:

$$\begin{aligned} &\omega_{f\mathbf{F}} = f\omega_{\mathbf{F}}; \\ &\omega_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}; \\ &\omega_{\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}} = \Omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}. \end{aligned}$$

   ii. Derivadas:

$$\begin{aligned} &\omega_{\nabla f} = df; \\ &\Omega_{\nabla\times\mathbf{F}} = d\Omega_{\mathbf{F}}; \\ &(\nabla \cdot \mathbf{F})dV_3 = d\Omega_{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

   iii. Integrais:

$$\begin{aligned} &\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_M \omega_{\mathbf{F}}; \\ &\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_M \Omega_{\mathbf{F}}; \end{aligned}$$

   iv. Teoremas Sobre Derivadas:

$$\begin{aligned} &\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \Leftrightarrow d(df) = 0; \\ &\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \Leftrightarrow d(d\omega_{\mathbf{F}}) = 0. \end{aligned}$$

   v. Teoremas Sobre Integrais:

$$\begin{aligned} &\int_M (\nabla f) \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \int_M df = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}); \\ &\iint_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dg} \Leftrightarrow \int_M d\omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \omega_{\mathbf{F}}; \\ &\iiint_M (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV_3 = \oiint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 \Leftrightarrow \int_M d\Omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \Omega_{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

8. Se $\mathbf{g} : V \to E^n$ é uma mudança de coordenadas, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(t^1, \ldots, t^n)$, e $f : E^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, então:
   i. $\dfrac{\partial}{\partial t^i} \equiv \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i} = \dfrac{\partial g^1}{\partial t^i}\mathbf{e}_n + \ldots \dfrac{\partial g^n}{\partial t^i}\mathbf{e}_n = \dfrac{\partial g^1}{\partial t^i}\dfrac{\partial}{\partial x^1} + \ldots \dfrac{\partial g^n}{\partial t^i}\dfrac{\partial}{\partial x^n};$
   ii. $\dfrac{\partial f}{\partial t^i} = df\left(\dfrac{\partial}{\partial t^i}\right) = D_{\frac{\partial}{\partial t^i}} f;$
   iii. $\left\{\dfrac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial t^n}\right\}$ é uma base para E^n;
   iv. $dt^i\left(\dfrac{\partial f}{\partial t^j}\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases};$
   v. $\{dt^1, \ldots, dt^n\}$ é uma base para $(E^n)^*$, dita a *base dual* de $\left\{\dfrac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial t^n}\right\}$;
   vi. $\omega_{\frac{\partial}{\partial t^i}} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} G_{ij}\, dt^j$, onde $G_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial t^i} \cdot \dfrac{\partial}{\partial t^j}$.
9. *Coordenadas Cilíndricas em E^3*: Tem-se

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto $\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial}{\partial \theta}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$ é uma base ortogonal correspondendo às formas $\{dr, r^2 d\theta, dz\}$. A respectiva base ortonormal satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \sim dr \sim \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_z \sim r d\theta \wedge dz; \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \sim r d\theta \sim \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r \sim dz \wedge dr; \\ \mathbf{e}_z &= \frac{\partial}{\partial z} \sim dz \sim \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \sim r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

(onde escrevemos $\mathbf{F} \sim \omega_{\mathbf{F}} \sim \Omega_{\mathbf{F}}$). Tem-se ainda

$$dV_3 = r dr \wedge d\theta \wedge dz.$$

10. *Coordenadas Esféricas em E^3*: Tem-se

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix}$$

e portanto $\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial}{\partial \theta}, \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\right\}$ é uma base ortogonal correspondendo às formas $\{dr, r^2 d\theta, r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi\}$.

A respectiva base ortonormal satisfaz

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \sim dr \sim \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi \sim r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta \wedge d\varphi; \\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \sim r d\theta \sim \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r \sim r \operatorname{sen}\theta d\varphi \wedge dr; \\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \sim r \operatorname{sen}\theta d\varphi \sim \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \sim r dr \wedge d\theta.
\end{aligned}
$$

Tem-se ainda

$$dV_3 = r^2 \operatorname{sen}\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

4. Lema de Poincaré Generalizado

1. Dois conjuntos abertos $U, V \in E^n$ dizem-se *difeomorfos* se existe uma bijecção $f : U \to V$ de classe C^∞ cuja inversa é também de classe C^∞ (f diz-se um *difeomorfismo*).
2. *Lema de Poincaré Generalizado:* Se U é em estrela e V é difeomorfo a U então qualquer forma fechada em V é exacta.