Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2001/2002

2º Exame

25 de Janeiro de 2002 – 17 horas

Duração: 3h

Apresente e justifique todos os cálculos relevantes

1. Considere o conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in E^3 : z = x^2 + y^2, x + y + z = 4\right\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(1 val.) (b) Escreva a equação do plano normal a M no ponto $(1, 1, 2)$.

(2 val.) (c) Mostre que numa vizinhança do ponto $(1, 1, 2)$ é possível parametrizar M usando x como parâmetro. Calcule $\frac{dy}{dx}(1)$, $\frac{dz}{dx}(1)$, e use este resultado para indicar um vector tangente a M no ponto $(1, 1, 2)$.

(2 val.) **2.** Determine a distância da origem à superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in E^3 : xyz = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\right\}.$$

3. Considere o conjunto mensurável

$$A = \left\{(x, y, z) \in E^3 : 0 \le z \le x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A como um integral iterado da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$.

(2 val.) (b) Calcule o momento de inércia de A em relação ao eixo dos xx para uma função densidade de massa $\rho(x, y, z) = x$.

Volte S. F. F.

4. Considere os conjuntos

$$A = \left\{ (x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1 \, , \, z \geq 0 \right\},$$
$$S = \left\{ (x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \, , \, z \geq 0 \right\}$$

e o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-ye^z, xe^z, z).$$

(2 val.) (a) Mostre **directamente pela definição** que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S no sentido da normal unitária exterior a A é $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \frac{4\pi}{3}$.

(1 val.) (b) Use a alínea anterior para calcular $\iiint_A \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_3$.

(1 val.) (c) Calcule $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dV_2$.

5. Considere a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 = e^{-2z}, \, z > 0 \right\}$$

e a 2-forma

$$\omega = \frac{1}{1 + z^2} dz \wedge \left(-ye^{2z} dx + xe^{2z} dy \right).$$

(2 val.) (a) Calcule a área de S.

(2 val.) (b) Determine o valor de $\int_S \omega$ com a orientação correspondente à normal exterior **usando o Teorema de Stokes**.

Justifique cuidadosamente as suas respostas.

(2 val.) **6.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx.$$

Mostre que $f'(t) = -\frac{1}{2} t f(t)$, e determine $f(t)$ a partir desta equação. (**Nota:** *Pode usar o facto de que* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).