Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 4

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 17 de Outubro

1. Recorde que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se diz *compacto* se é limitado e fechado. Uma família de conjuntos $\{U_\alpha\}$ diz-se uma *cobertura* de $X \subset \mathbb{R}^n$ se $X \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. A cobertura diz-se *aberta* se cada um dos conjuntos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Uma *subcobertura* de $\{U_\alpha\}$ é uma subfamília que é ainda uma cobertura de X.

   (a) Prove o Teorema de Heine-Borel: $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto *sse* toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita. (**Sugestão:** *Comece por mostrar que toda a cobertura aberta admite uma subcobertura numerável*).

   (b) Use (a) para provar o Teorema de Heine-Cantor: se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto então f é uniformemente contínua em K.

   (c) Use (b) para mostrar que o gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+m}$.

   (d) Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto então $f(K)$ é compacto. Em particular, prove o Teorema de Weierstrass: se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto então f tem máximo e mínimo em K.

2. Escreva os volumes dos seguintes conjuntos Jordan-mensuráveis como integrais iterados:

   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 1\}$;

   (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } y^2 + z^2 \leq 1\}$;

   (c) $C = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^1| + \ldots + |x^n| \leq 1\}$.

   Não precisam de entregar:

3. Dado um intervalo compacto $I = [a, a + 3\Delta] \subset \mathbb{R}$, definimos

$$T(I) = [a, a + \Delta] \cup [a + 2\Delta, a + 3\Delta].$$

   Se $I_1, \ldots, I_n$ são intervalos compactos disjuntos, definimos

$$T(I_1 \cup \ldots \cup I_n) = T(I_1) \cup \ldots T(I_n).$$

   Consideramos a família $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos definida recursivamente por $J_1 = [0, 1]$ e $J_{n+1} = T(J_n)$. O *conjunto de Cantor* é o conjunto

$$C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n.$$

   Mostre que C é um conjunto compacto, com medida nula e a potência do contínuo. (**Sugestão:** *Mostre que qualquer número no intervalo* $[0, 1]$ *cuja expansão em base* 3 *não contém o dígito* 1 *tem que estar no conjunto de Cantor*).

4. Para cada um dos conjuntos J_n definidos no exercício anterior, considere a função contínua $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ que é constante em $[0,1] \setminus J_n$ e é afim com declive $(\frac{3}{2})^{n-1}$ em cada subintervalo de J_n (note que $f_n(0) = 0$ e $f_n(1) = 1$). Mostre que a sucessão de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (dita a *escada do Diabo*), crescente, com $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, diferenciável com derivada nula em todos os pontos do aberto $[0,1] \setminus C$ (onde C é o conjunto de Cantor). Mostre ainda que f fornece uma sobrejecção entre C e $[0,1]$.

5. A *função de Riemann* é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = 0 \\ \frac{1}{q} \text{ se } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ com } x = \frac{p}{q} \text{ fracção irredutível, } p \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostre que f é integrável à Riemann em qualquer intervalo compacto.

6. Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem medida nula.