Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 7

A entregar até à aula teórica de segunda-feira dia 10 de Novembro

1. Considere as seguintes formas diferenciais:

$$
\begin{aligned}
&\alpha = xdx + ydy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2);\\
&\beta = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\});\\
&\omega = e^{xz}dx + x\cos z dy + y^2 dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3);\\
&\eta = xdx \wedge dy - zdx \wedge dz + xyzdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3);\\
&\zeta = dx^1 \wedge dx^2 + \ldots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n} \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n}).
\end{aligned}
$$

   Considere ainda as seguintes funções C^∞:

   $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$;
   $\mathbf{g} :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(r, \theta) = (r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$;
   $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{h}(u, v, w) = (uv, vw, uw)$.

   Calcule:

   (a) $\alpha \wedge \beta$, $\omega \wedge \eta$, $\eta \wedge \eta$;
   (b) $\zeta \wedge \ldots \wedge \zeta$ (produto exterior com n factores);
   (c) $d\alpha, d\beta, d\omega, d\eta, d\zeta$.
   (d) $\mathbf{f}^*\alpha, \mathbf{g}^*\alpha, \mathbf{g}^*\beta, \mathbf{h}^*\eta$

2. Dado um vector

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + \ldots + v^n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

   definimos o covector-1

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1dx^1 + \ldots + v^ndx^n$$

   e o covector-$(n-1)$

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n - \ldots + (-1)^{n-1}v^ndx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.$$

   Mostre que:

   (a) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \Omega_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.
   (b) Se $n = 3$,

$$\omega_{\mathbf{v}} \wedge \omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}},$$

   onde $\times$ designa o produto externo de vectores em $\mathbb{R}^3$.

(c) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente dependentes *sse*

$$\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_k} = 0.$$

(**Sugestão:** *Poderá ser útil mostrar que* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *são linearmente dependentes* sse *a matriz* $k \times k$ *dada por* $g = (g_{ij}) = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)$ *é singular; note que pode sempre escrever a matriz* g *como* $g = V^t V$, *onde* V *é a matriz cujas colunas são* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$).

(d) O *produto externo* em $\mathbb{R}^n$ é a operação $(n-1)$-ária que associa a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ o vector $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}$ definido por

$$\Omega_{\mathbf{w}} = \omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_{n-1}}.$$

Mostre que $\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}$ é ortogonal a cada um dos seus factores.

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar e $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial. Mostre que:

(a) $df = \omega_{\nabla f}$, onde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\mathbf{e}_n$$

é o *gradiente* de f.

(b) $d\Omega_{\mathbf{v}} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, onde

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial v^n}{\partial x^n}$$

é a *divergência* de $\mathbf{v}$.

Suponha agora que $n = 3$. Mostre que:

(c) $d\omega_{\mathbf{v}} = \Omega_{\nabla \times \mathbf{v}}$, onde

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v^3}{\partial y} - \frac{\partial v^2}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial z} - \frac{\partial v^3}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3$$

é o *rotacional* de $\mathbf{v}$.

(d) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

(e) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$.

Não precisam de entregar:

4. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^l(U)$, $\mathbf{f} : V \subset \mathbb{R}^m \to U$ e $\mathbf{g} : W \subset \mathbb{R}^p \to V$ funções de classe C^∞ definidas em abertos. Prove as seguintes propriedades:

(a) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$;

(b) $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = (\mathbf{f}^*\omega) \wedge (\mathbf{f}^*\eta)$;

(c) $\mathbf{g}^*(\mathbf{f}^*\omega) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})^*\omega$.

5. Considere uma mudança de coordenadas linear em $\mathbb{R}^n$, definida por

$$\overline{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j.$$

(a) Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^i \overline{\mathbf{e}}_i$$

sse

$$\overline{x}^i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x^j,$$

onde $(b_{ij}) = (a_{ji})^{-1}$.

(b) Mostre que se $\{d\overline{x}^1, \ldots, d\overline{x}^n\}$ é a base dual de $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$, então

$$d\overline{x}^i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} dx^j.$$

É por este motivo que os covectores se dizem tensores *covariantes*.

(c) Mostre que o dual dos espaço dos covectores-1, $((\mathbb{R}^n)^*)^*$, pode ser naturalmente identificado com $\mathbb{R}^n$. Portanto os vectores podem também ser vistos como aplicações lineares definidas no espaço dos covectores-1, ditas *tensores contravariantes*.

(d) Defina produto tensorial de dois vectores, e produto tensorial de um covector por um vector.

(e) Defina tensores de tipo (p, q), i.e., tensores p vezes covariantes e q vezes contravariantes, e indique uma base. Indique como é que os elementos da base se transformam sob uma mudança linear de coordenadas.

(f) Mostre que os tensores de tipo $(1, 1)$ podem ser identificados com o espaço das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$.