Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 8

A entregar até à aula teórica de segunda-feira dia 24 de Novembro

1. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f : V \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : U \to V$ funções C^∞ e
$$\omega(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \in \Omega^n(V).$$
Mostre que
$$\mathbf{g}^*\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) J\mathbf{g}(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

2. O *paralelepípedo-k* gerado pelos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto
$$P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \left\{ t^1\mathbf{v}_1 + \ldots + t^k\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n : t^1, \ldots, t^k \in [0,1] \right\}.$$

   (a) Mostre que o paralelepípedo-n gerado por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ é mensurável à Jordan e
$$V_n(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)) = |\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)|.$$

   (b) O *volume-k* de $P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset \mathbb{R}^n$ define-se do seguinte modo: o plano coordenado
$$\pi_k = \left\{ \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n : x^{k+1} = \ldots = x^n = 0 \right\}$$
pode ser identificado com $\mathbb{R}^k$ de forma natural. Se A é uma matriz ortogonal tal que $A \cdot P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset \pi_k$, definimos
$$V_k(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = V_k(A \cdot P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)),$$
onde o lado direito da igualdade está bem definido devido à identificação de π_k com $\mathbb{R}^k$. Mostre que
$$V_k(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = (\det g)^{\frac{1}{2}},$$
onde g é a matriz $k \times k$ definida por
$$g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$$
(portanto o volume-k não depende da escolha de A).

   (c) Mostre que
$$V_k(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = \left[\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

   (d) Mostre que
$$\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\mathbf{v}_n} = \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$
Conclua que
$$V_{n-1}(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})) = \|\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}\|.$$
(**Sugestão:** *Faça*
$$\mathbf{v}_n = \frac{\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}}{\|\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1}\|}).$$

(e) Mostre que

$$\mathbf{v}_1 \times \ldots \times \mathbf{v}_{n-1} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \ldots & \mathbf{e}_n \\ v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1}^1 & \ldots & v_{n-1}^n \end{bmatrix}.$$

3. Decida se as seguintes formas diferenciais definidas em $\mathbb{R}^3$ são ou não exactas. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

   (a) $yzdx + xzdy + xydz$;

   (b) $zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$;

   (c) $2dx \wedge dy + yzdx \wedge dz + xzdy \wedge dz$;

   (d) $x^2ye^z dx \wedge dy \wedge dz$.

   (**Sugestão:** *Note que se $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ é exacta e $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ é um potencial, $\alpha + df$ é ainda um potencial, qualquer que seja a função $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$; use este facto para mostrar que é sempre possível escolher um potencial para ω em que uma das componentes é nula*).

4. Determine os espaços tangentes às variedades seguintes nos pontos indicados utilizando parametrizações convenientes:

   (a) $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

   (b) $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } x = y\right\}$ no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

   (c) $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\right\}$ no ponto $\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   Não precisam de entregar:

5. Considere $\mathbb{R}^{2n}$ com as funções coordenadas $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$, e a forma-2

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

   (dita a *forma simpléctica canónica*).

   (a) Mostre que ω é exacta e indique um potencial.

   (b) Seja $\mathbf{X} = (\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta_1, \ldots, \eta_n) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ um campo vectorial. A *contracção* de $\mathbf{X}$ com ω é a forma-1 $\mathbf{X}\rfloor\omega$ definida por

$$\mathbf{X}\rfloor\omega(\mathbf{Y}) = \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

   para todo o $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\mathbf{X}\rfloor\omega = \sum_{i=1}^{n} \left(\eta_i dq^i - \xi^i dp_i\right).$$

(c) O *campo Hamiltoniano* gerado pela função $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ é o campo vectorial $\mathbf{X}_H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$\mathbf{X}_H \rfloor \omega = -dH.$$

Mostre que

$$\mathbf{X}_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q^n} \right).$$

(d) O campo vectorial $\mathbf{X}_H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ determina o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}_H(\mathbf{x}(t)).$$

Mostre que

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{x}(t)) = (\mathbf{X}_H \rfloor dH)\,(\mathbf{x}(t))$$

e aproveite para mostar que H é constante ao longo das soluções destas equações, i.e.,

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

(e) Mostre que o sistema de equações determinado por $\mathbf{X}_H$ é

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(*equações de Hamilton*). Escreva as equações de Hamilton para a função $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i)^2 + U(q^1, \ldots, q^n).$$