Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

2º Teste - 19 de Dezembro de 2003 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere os campos vectoriais $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \to \mathbb{R}^3$ definidos por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \frac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}.$$

(2 val.) (a) Mostre que $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{0}$. Indique, justificando, se cada um estes campos é ou não um gradiente no seu domínio. (**Sugestão:** *Poderá ser-lhe útil utilizar coordenadas esféricas/cilíndricas*).

(2 val.) (b) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. Indique, justificando, se cada um estes campos é ou não um rotacional no seu domínio.

(2 val.) (c) Indique, justificando, se $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ é ou não um gradiente/rotacional no seu domínio. Em caso afirmativo, determine um potencial/potencial vector.

(2 val.) (d) Dê um exemplo de um campo $\mathbf{H} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ e $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ mas que não seja nem um gradiente nem um rotacional no seu domínio.

2. Seja $M \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ uma variedade-2 com bordo compacta tal que $\mathbf{x} \notin T_{\mathbf{x}}M$ para todo o $\mathbf{x} \in M \setminus \partial M$. O *ângulo sólido* determinado por M é o conjunto

$$\Omega(M) = \{\lambda \mathbf{x} : \mathbf{x} \in M \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}^+\},$$

e a *medida* deste ângulo sólido é

$$|\Omega(M)| = V_2\left(\Omega(M) \cap S^2\right)$$

onde

$$S^2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$$

é a esfera de raio 1 centrada na origem.

(3 val.) (a) Mostre que

$$|\Omega(M)| = \int_M \Omega_{\mathbf{F}}$$

para uma certa orientação de M, onde $\mathbf{F}$ é o campo definido na questão 1 e $\Omega_{\mathbf{F}}$ é a forma-2 associada a este campo (que por este motivo por vezes se diz o *elemento de ângulo sólido*).

(3 val.) (b) Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calcule $|\Omega(M)|$ sem usar o Teorema de Stokes para variedades-2 com bordo.

(3 val.) (c) Confirme o resultado da alínea anterior usando o Teorema de Stokes para variedades-2 com bordo.

(3 val.) **3.** Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a superfície

$$M_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 1,\ x^2 + y^2 = z^{2\alpha}\}$$

possui área finita (i.e., o *pull-back* do elemento de volume por uma qualquer parametrização determina uma função integrável no domínio dessa parametrização).