Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

2º Teste - 19 de Dezembro de 2003 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere os campos vectoriais $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \to \mathbb{R}^3$ definidos por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \frac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}.$$

(2 val.) (a) Mostre que $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{0}$. Indique, justificando, se cada um estes campos é ou não um gradiente no seu domínio. (**Sugestão:** *Poderá ser-lhe útil utilizar coordenadas esféricas/cilíndricas*).

(2 val.) (b) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. Indique, justificando, se cada um estes campos é ou não um rotacional no seu domínio.

Resolução: Em coordenadas esféricas (r, θ, φ) tem-se

$$\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$$

e portanto

$$\omega_{\mathbf{F}} = \frac{1}{r^2}dr;$$
$$\Omega_{\mathbf{F}} = \mathrm{sen}\theta d\theta \wedge d\varphi.$$

Consequentemente,

$$d\omega_{\mathbf{F}} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0};$$
$$d\Omega_{\mathbf{F}} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = 0.$$

Além disso, claramente

$$\omega_{\mathbf{F}} = d\left(-\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow \mathbf{F} = \nabla\left(-\frac{1}{r}\right)$$

e portanto $\mathbf{F}$ é o gradiente da função

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

que está definida no domínio de $\mathbf{F}$. Logo, $\mathbf{F}$ é um gradiente no seu domínio. No entanto,

$$\int_{S^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \int_{S^2} 1 \, dV_2 = V_2(S^2) = 4\pi \neq 0,$$

onde S^2 designa a superfície esférica de raio 1 centrada na origem e $\mathbf{n}$ a normal exterior unitária, pelo que $\mathbf{F}$ não pode ser um rotacional.

Analogamente, em coordenadas cilíndricas (r, θ, z), tem-se

$$\mathbf{G} = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta$$

e portanto

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{G}} &= d\theta; \\ \Omega_{\mathbf{G}} &= \frac{1}{r} dz \wedge dr. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{G}} &= 0 \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{0}; \\ d\Omega_{\mathbf{G}} &= 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{G} = 0. \end{aligned}$$

Além disso, claramente

$$\Omega_{\mathbf{G}} = d\left(-\log r \; dz\right) \Leftrightarrow \mathbf{G} = \nabla \times \left(-\log r \; \mathbf{e}_z\right)$$

e portanto $\mathbf{G}$ é o rotacional do campo

$$\mathbf{A} = \left(0, 0, -\frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2\right)\right),$$

cujo domínio coincide com o domínio de $\mathbf{G}$. Consequentemente, $\mathbf{G}$ é um rotacional no seu domínio. No entanto,

$$\int_{S^1} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{g} = \int_{S^1} d\theta = 2\pi \neq 0,$$

onde S^1 designa a circunferência de raio 1 contida no plano $z = 0$, centrada na origem e orientada no sentido directo, pelo que $\mathbf{G}$ não pode ser um gradiente.

(2 val.) (c) Indique, justificando, se $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ é ou não um gradiente/rotacional no seu domínio. Em caso afirmativo, determine um potencial/potencial vector.

Resolução: Uma vez que o domínio de $\mathbf{F}$ (complementar da origem) contém o domínio de $\mathbf{G}$ (complementar do eixo dos zz), o domínio de $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ coincide com o domínio de $\mathbf{G}$; consequentemente, $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ não pode ser um gradiente, porque nesse caso $\mathbf{G} = \mathbf{F} + \mathbf{G} - \mathbf{F}$ também o seria. Por outro lado, uma vez que qualquer variedade-2 compacta no complementar do eixo dos zz é bordo de alguma variedade-3 com bordo compacta, e $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ tem divergência nula, segue-se que $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ é necessariamente um rotacional no seu domínio. Uma vez que já calculámos um potencial vector para $\mathbf{G}$, basta calcular um potencial vector para $\mathbf{F}$. Ora em coordenadas esféricas

$$\Omega_{\mathbf{F}} = \operatorname{sen}\theta d\theta \wedge d\varphi = d(-\cos\theta d\varphi) \Leftrightarrow \mathbf{F} = \nabla \times \left(-\frac{\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}\mathbf{e}_\varphi\right).$$

Consequentemente, $\mathbf{F}$ é o rotacional do campo

$$\mathbf{B} = \frac{z}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(y,-x,0)$$

cujo domínio coincide com o domínio de $\mathbf{F}+\mathbf{G}$. Logo este campo é um rotacional no seu domínio, e um potencial vector é $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

(2 val.) (d) Dê um exemplo de um campo $\mathbf{H} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ e $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ mas que não seja nem um gradiente nem um rotacional no seu domínio.

Solução: Por exemplo, $\mathbf{H} = \mathbf{F} + \mathbf{V}$, onde

$$\mathbf{V} = \frac{(-y, x-1, 0)}{(x-1)^2+y^2}.$$

2. Seja $M \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ uma variedade-2 com bordo compacta tal que $\mathbf{x} \notin T_{\mathbf{x}}M$ para todo o $\mathbf{x} \in M \setminus \partial M$. O *ângulo sólido* determinado por M é o conjunto

$$\Omega(M) = \{\lambda \mathbf{x} : \mathbf{x} \in M \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}^+\},$$

e a *medida* deste ângulo sólido é

$$|\Omega(M)| = V_2\left(\Omega(M) \cap S^2\right)$$

onde

$$S^2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$$

é a esfera de raio 1 centrada na origem.

(3 val.) (a) Mostre que

$$|\Omega(M)| = \int_M \Omega_{\mathbf{F}}$$

para uma certa orientação de M, onde $\mathbf{F}$ é o campo definido na questão 1 e $\Omega_{\mathbf{F}}$ é a forma-2 associada a este campo (que por este motivo por vezes se diz o *elemento de ângulo sólido*).

Resolução: Uma vez que $\mathbf{0} \notin M$ e M é compacta, existe $\varepsilon > 0$ tal que $M \cap \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{0}) = \varnothing$. Seja $A = \Omega(M) \cap \partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ e U o subconjunto de $\Omega(M)$ limitado por A e M. Uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, o fluxo de $\mathbf{F}$ através de ∂U no sentido da normal exterior tem que ser nulo. Ora $\partial U = A \cup M \cup B$, onde B é uma união de segmentos de recta radiais unindo ∂A a ∂M. Logo $\mathbf{F}$ é tangente a B e portanto o fluxo de $\mathbf{F}$ através de B é nulo. Concluimos que

$$\int_M \Omega_{\mathbf{F}} = \int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = -\int_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2,$$

$\mathbf{n}$ designa a normal unitária exterior e a orientação de M no primeiro integral é a determinada por $\mathbf{n}$.

Seja agora $C = \Omega(M) \cap S^2$. Analogamente ao que acabámos de fazer, tem-se

$$-\int_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_C \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\, dV_2 = \int_C 1\, dV_2 = V_2(C) = |\Omega(M)|,$$

como era pedido.

(3 val.) (b) Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calcule $|\Omega(M)|$ sem usar o Teorema de Stokes para variedades-2 com bordo.

Resolução: Podemos parametrizar M usando as coordenadas angulares esféricas (θ, φ); a parametrização terá então como domínio $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\times]0, 2\pi[$. Uma vez que o ângulo sólido é necessariamente positivo, temos então

$$|\Omega(M)| = \int_M \Omega_{\mathbf{F}} = \int_M \text{sen}\theta d\theta \wedge d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \text{sen}\theta d\varphi d\theta = \sqrt{2}\pi.$$

(3 val.) (c) Confirme o resultado da alínea anterior usando o Teorema de Stokes para variedades-2 com bordo.

Resolução: Em $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ temos

$$\Omega_{\mathbf{F}} = d(-\cos\theta d\varphi).$$

Pelo teorema de Stokes para variedades-2 com bordo temos então

$$|\Omega(M)| = \int_{\partial M} -\cos\theta d\varphi,$$

onde a orientação de ∂M deve ser no sentido directo para a circunferência contida no plano $z = 0$ (quando vista de $z > 0$) e no sentido inverso para a circunferência contida no plano $z = 1$ (quando vista de $z > 1$). Podemos usar a coordenada esférica φ como parâmetro para estas curvas, obtendo então

$$|\Omega(M)| = \int_{]0,2\pi[^+} -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) d\varphi + \int_{]0,2\pi[^-} -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} d\varphi = \sqrt{2}\pi.$$

(3 val.) **3.** Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a superfície

$$M_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 1,\ x^2 + y^2 = z^{2\alpha}\}$$

possui área finita (i.e., o *pull-back* do elemento de volume por uma qualquer parametrização determina uma função integrável no domínio dessa parametrização).

Resolução: Uma parametrização de M_α é $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\times]1, +\infty[$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, z) = (z^\alpha \cos\theta, z^\alpha \text{sen}\theta, z).$$

Tem-se

$$\det D\mathbf{g}^t D\mathbf{g} = \begin{vmatrix} z^{2\alpha} & 0 \\ 0 & 1 + \alpha^2 z^{2\alpha-2} \end{vmatrix} = z^{2\alpha} + \alpha^2 z^{4\alpha-2}.$$

Portanto a área de M_α será

$$V_2(M_\alpha) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sqrt{z^{2\alpha} + \alpha^2 z^{4\alpha-2}} d\theta dz = 2\pi \int_0^{+\infty} \sqrt{z^{2\alpha} + \alpha^2 z^{4\alpha-2}} dz$$

sempre que este integral existir.

Se $\alpha \geq 0$, a função integranda é ≥ 1, e portanto não é integrável em $]1, +\infty[$; se $\alpha < 0$, tem-se

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{\sqrt{z^{2\alpha} + \alpha^2 z^{4\alpha-2}}}{z^\alpha} = \lim_{z \to +\infty} \sqrt{1 + \alpha^2 z^{2\alpha-2}} = 1,$$

e portanto a função integranda é integrável *sse* z^α integrável, i.e., *sse* $\alpha < 1$.