Exame de Mecânica Geométrica

José Natário

19 de Julho de 2001

1. Um *pêndulo esférico* de comprimento $l = 1$ é simplesmente uma partícula de massa m movendo-se sem atrito sobre a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sabendo que o potencial gravitacional é $U = mgz$,

   a) Descreva o sistema mecânico $(Q, <, >, \mathcal{F})$ correspondente.

   b) Escreva o Lagrangeano do sistema usando as coordenadas esféricas (θ, φ). (**Sugestão:** *Recorde que as coordenadas esféricas* (r, θ, φ) *são definidas através de*

   $$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

   e que a energia cinética de uma partícula de massa m *em* $\mathbb{R}^3$ *é dada por*

   $$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right)$$

   nestas coordenadas).

   c) Para que valores de θ_0 são os paralelos $\theta = \theta_0$ trajectórias possíveis para a partícula? Calcule os períodos dessas trajectórias.

   d) Escreva uma métrica Riemanniana para um aberto $U \subset S^2$ tal que o paralelo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ é uma geodésica dessa métrica.

2. Um espião Klingon consegue apropriar-se da mais recente nave espacial Terrestre, a *Einstein*, e fugir na direcção do seu planeta a 60% da velocidade da luz. Em desespero de causa, decide-se instalar um motor experimental na *Enterprise* que teoricamente lhe permitirá alcançar 80% da velocidade da luz. A instalação demora 1 ano, mas o novo motor funciona na perfeição. A *Enterprise* parte no encalço do espião e captura-o algum tempo depois no decorrer de uma emocionante batalha.

   a) Quanto tempo decorre entre o roubo do *Einstein* e a sua captura

      (i) de acordo com um observador no referencial (inercial) da Terra?

      (ii) de acordo com o espião Klingon?

      (iii) de acordo com os tripulantes da *Enterprise*?

   b) Qual a velocidade da *Einstein* em relação à *Enterprise* durante a perseguição?

c) Foi decidido que, caso a *Enterprise* fosse destruida, seria emitido da Terra um sinal de rádio que accionaria o mecanismo secreto de auto-destruição da *Einstein*. Quanto tempo após o roubo se saberá na Terra se o sinal deve ou não ser emitido?

3. Seja $(Q, <,>)$ uma variedade Riemanniana de dimensão n, $\{X_1, \ldots, X_n\}$ um referencial ortonormal definido nalgum aberto $U \subset Q$ e $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ o co-referencial associado. Definem-se as *funções de estrutura* C^i_{jk} do referencial através de

$$[X_j, X_k] = C^i_{jk} X_i,$$

e, como habitualmente, os *símbolos de Christoffel* mediante

$$\nabla_{X_j} X_k = \Gamma^i_{jk} X_i.$$

a) Mostre que

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k.$$

b) Mostre que

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}(C^i_{jk} + C^k_{ij} - C^j_{ki}).$$

c) Suponha a partir de agora que Q é um grupo de Lie, $<,>$ é uma métrica invariante à esquerda e $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é um referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda. Mostre que as funções de estrutura são constantes (ditas as *constantes de estrutura*).

d) Mostre que a curvatura escalar de qualquer métrica invariante à esquerda num grupo de Lie é constante.

e) Recorde que a álgebra de Lie de $SO(3)$ é

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A^t = -A\},$$

e que o comutador de matrizes em $\mathfrak{so}(3)$ fornece o parêntesis de Lie dos correspondentes campos invariantes à esquerda. Fazendo

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

calcule as constantes de estrutura e os símbolos de Christoffel.

f) Mostre que para cada $A \in \mathfrak{so}(3)$ a curva e^{At} é uma geodésica da métrica invariante à esquerda definida na alínea anterior. (**Sugestão:** *Note que a curva dada é uma curva integral do campo invariante à esquerda correspondente a* A).

g) Mostre que as geodésicas da alínea anterior são curvas fechadas. Como sabe, qualquer métrica invariante à esquerda em $SO(3)$ corresponde a um corpo rígido. Que pode dizer sobre o corpo rígido correspondente a esta métrica?