1^{a} Série de problemas de Mecânica Geométrica

José Natário

2 de Abril de 2001

1. Mostre que $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $SO(3) \subset M_{3\times 3} \simeq \mathbb{R}^9$ são variedades diferenciáveis e indique a sua dimensão. (**Sugestão:** *Escreva cada um destes conjuntos como zeros de funções diferenciáveis convenientes*).

2. Seja Q uma variedade diferenciável de dimensão n, (U,φ) uma carta local, $p \in \varphi(U)$, $\varphi^{-1} = (x^1,\ldots,x^n)$, $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to Q$ um caminho satisfazendo $\gamma(0) = p$ e
$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^{-1}(\gamma(t))\right)\Big|_{t=0} = (v^1,\ldots,v^n) \in \mathbb{R}^n.$$
Mostre que
$$[\gamma] = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p).$$
Mostre que se $(\overline{U},\overline{\varphi})$ é outra carta local com $p \in \overline{\varphi}(\overline{U})$, $\overline{\varphi}^{-1} = (y^1,\ldots,y^n)$ então
$$[\gamma] = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}(p)$$
onde $y(x) = (\overline{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(x)$.

3. Dê duas cartas locais distintas para uma vizinhança de $(0,0,1) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Calcule as componentes do vector $(1,0,0) \in T_{(0,0,1)}S^2 \subset \mathbb{R}^3$ usando cada uma dessas cartas e o exercício anterior.

4. Sejam X e Y campos vectoriais C^∞ numa variedade diferenciável Q de dimensão n, vistos como operadores em $C^\infty(Q,\mathbb{R})$. Mostre que o operador $[X,Y]$ define em cada ponto $p \in Q$ uma derivação, e portanto um vector tangente. Mostre ainda que se em coordenadas locais $(x^1,\ldots,x^n)$ se tem
$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$
então
$$[X,Y] = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

5. Seja $f :]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$ a habitual mudança para coordenadas esféricas,
$$(x,y,z) = f(r,\theta,\varphi) = (r \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta).$$
Calcule $f^*(dx \wedge dy \wedge dz)$.

6. Mostre que T^*Q é sempre orientável, mesmo quando Q não o é. (**Sugestão:** *Note que em T^*Q pode sempre definir a 1-forma canónica θ que no ponto $\sigma_p \in T_p^*Q$ é igual a $\pi^*\sigma_p$, onde $\pi : T^*Q \to Q$ é a projecção canónica, e considere a 2-forma $\omega = d\theta$; veja também o exercício 9*).

7. Considere a carta $\psi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$\psi(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta).$$

Mostre que $\omega = \operatorname{sen}\theta d\theta \wedge d\varphi$ define (por continuidade) uma forma de volume em S^2. Calcule $\int_{S^2} \omega$.

8. Mostre que em S^2 há formas diferenciais ω *fechadas* ($d\omega = 0$) mas não *exactas* ($\omega \neq d\eta$).

9. Uma *variedade simplética* é um par (M, ω), onde M é uma variedade e ω é uma 2-forma fechada ($d\omega = 0$) e *não degenerada* (i.e., tal que a aplicação $T_pM \ni X_p \mapsto X_p \rfloor \omega_p \in T_p^*M$ é uma bijecção).

   a) Mostre que M tem necessariamente dimensão par, $\dim M = 2n$.
   b) Mostre que $\omega \wedge \ldots \wedge \omega \in \Gamma^{2n}(M)$ é uma forma de volume. Conclua que M é necessariamente orientável.
   c) Mostre que se Q é uma variedade de dimensão n então T^*Q é uma variedade simplética de dimensão $2n$.
   d) Uma função $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ define um campo C^∞ X_H (dito o *campo Hamiltoniano gerado por H*) mediante
   $$X_H \rfloor \omega = -dH.$$
   Mostre que $\pounds_{X_H}\omega = 0$.
   e) Mostre que se $\pounds_X \omega = 0$ então X é *localmente Hamiltoniano*, i.e., para qualquer ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $V \ni p$ e uma função $H \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ tais que $X = X_H$ em V.

10. (**Opcional**) Considere o fluxo Φ_t^X do campo vectorial

$$X = (1 - e^{-x^2} + 1 - e^{-y^2})\frac{\partial}{\partial x}$$

em $Q = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y).

   a) Mostre que Φ_t^X está bem definido para todo o $t \in \mathbb{R}$, e que portanto define uma acção de $\mathbb{R}$ em Q.
   b) Mostre que o espaço topológico quociente $Q/\mathbb{R}$ não é Hausdorff.
   c) Esta acção não é propriamente descontínua. Construa uma acção propriamente descontínua de $\mathbb{Z}$ em Q cujo quociente $Q/\mathbb{Z}$ não seja Hausdorff.