3^{a} Série de problemas de Mecânica Geométrica

José Natário

11 de Junho de 2001

1. Seja $(Q, <,>)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e ∇ uma conexão afim em Q. Mostre que a primeira identidade de Bianchi,
$$R^a{}_{bcd} + R^a{}_{cdb} + R^a{}_{dbc} = 0$$
(válida se ∇ é simétrica), conjuntamente com a identidade
$$R_{abcd} = -R_{bacd}$$
(válida se ∇ é compatível com a métrica), implicam que
$$R_{abcd} = R_{cdab}$$
se ∇ é a conexão de Levi-Civita.

2. Mostre que se ∇ é uma conexão simétrica em Q, $f \in C^\infty(Q, \mathbb{R})$ e T é um campo tensorial em Q então
$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(fT) = f(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)T.$$
(**Sugestão:** *Comece por mostrar que*
$$X^aY^b(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)f = [X,Y]\cdot f - (\nabla_XY - \nabla_YX)\cdot f = 0,$$
e portanto $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)f = 0$).

3. Seja ∇ uma conexão simétrica em Q, $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uma base de campos vectoriais, $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ a base dual. Recorde que se
$$\nabla_{X_i}X_j = \Gamma^k_{ij}X_k$$
as *formas de conexão* se definem como
$$\omega^i_j = \Gamma^i_{kj}\omega^k$$
e as *formas de curvatura* como
$$\Omega^i_j = R^i{}_{jkl}\omega^k \otimes \omega^l = \sum_{k<l} R^i{}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l.$$
a) Mostre que
$$\nabla_ZX_i = \omega^j_i(Z)X_j, \quad \nabla_Z\omega^i = -\omega^i_j(Z)\omega^j.$$

b) Mostre (usando coordenadas locais) que se ω é uma 1-forma e $X, Y \in \chi(Q)$ então

$$d\omega(X,Y) = X \cdot [\omega(Y)] - Y \cdot [\omega(X)] - \omega([X,Y]).$$

c) Prove que

$$d\omega^i(X,Y) = -\omega^i_j \wedge \omega^j(X,Y)$$

para quaiquer $X, Y \in \chi(Q)$ (primeiras equações estruturais de Cartan).

d) Mostre que

$$R_{X,Y}X_i = \left[-d\omega_i^k(X,Y) + \omega_i^j \wedge \omega_j^k(X,Y)\right] X_k$$

para quaiquer $X, Y \in \chi(Q)$. Deduza daqui as segundas equações estruturais de Cartan.

4. Calcule o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e a curvatura escalar para o semiplano

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

com a métrica de Poincaré

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right).$$

5. Diremos que uma variedade Riemanniana de dimensão 3 é *esfericamente simétrica* se (à excepção de uma subvariedade de dimensão 2) puder ser coberta por uma carta local com coordenadas locais $(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ nas quais a métrica se escreve

$$ds^2 = A^2(r)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

Calcule o tensor de Ricci e a curvatura escalar de uma variedade esfericamente simétrica. Particularize para os casos em que $A^2(r) = \left(1-r^2\right)^{-1}$ (S^3) e $A^2(r) = \left(1+r^2\right)^{-1}$ (espaço hiperbólico). Para que funções $A(r)$ é constante a curvatura escalar?

6. Recorde que em $\mathbb{R}^4$ com coordenadas (t,x,y,z), as geodésicas da conexão simétrica definida por

$$\Gamma^x_{tt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad \Gamma^y_{tt} = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \Gamma^z_{tt} = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

são as trajectórias de partículas materiais sujeitas ao potencial gravitacional $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

a) Calcule as formas da conexão na base $\left\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$.

b) Mostre que $\nabla dt = 0$.

c) Calcule as formas de curvatura.

d) Mostre que se o tensor de Riemann não é nulo então ∇ não é a conexão de Levi-Civita de nenhuma métrica pseudo-Riemanniana em $\mathbb{R}^4$.

e) Mostre que o tensor de Ricci é

$$R_{ab} = \nabla^2\phi \, dt \otimes dt.$$

Portanto a equação de Poisson $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ pode ser escrita na forma

$$R_{ab} = -4\pi T_{ab},$$

onde $T_{ab} = \rho \, dt \otimes dt$.

7. Mostre que se $(Q, <,>)$ é uma variedade Riemanniana correspondente a um sistema mecânico, $\mu : TQ \to T^*Q$ é o operador de massa, $K : TQ \to \mathbb{R}$ é a energia cinética, $c : I \to Q$ é uma curva C^∞ e $(q^1, \ldots, q^n)$ são coordenadas locais em Q então

$$\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i}\right] dq^i.$$

.

8. Mostre que os movimentos de um sistema mecânico conservativo $(Q, <,>, -dU)$ são as soluções das equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano $L = K - U$.

9. Mostre que se ∇ é a conexão de Levi-Civita associada à métrica $<,>$ e $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita associada à métrica $\ll,\gg = e^{2\rho} <,>$ então

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - <X,Y> \operatorname{grad}\rho$$

onde $\operatorname{grad}\rho = \mu^{-1}(d\rho)$, sendo $\mu : TQ \to T^*Q$ o operador de massa associado a $<,>$.

10. Se (r, θ) são coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$, o movimento de uma partícula no potencial central $U = U(r)$ é uma solução das equações de Euler-Lagrange do Lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}\left\langle \dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}, \dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle - U(r) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r).$$

a) Mostre que as funções

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r)$$
$$l = r^2\dot{\theta}$$

são constantes ao longo do movimento (*primeiros integrais*).

b) O *potencial de Newton/Coulomb* é $U(r) = -\frac{1}{r}$. Use os primeiros integrais na alínea anterior para escrever uma expressão para $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ em função de r neste potencial.

c) Reescreva a equação que obteve na alínea anterior em termos da variável $u = \frac{1}{r}$. *Derive* a equação em ordem a θ (obtendo assim uma equação linear em u) e resolva-a.

d) Caracterize todas as geodésicas de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ com a métrica

$$ds^2 = \frac{1}{r}\left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right).$$