Exame de Mecânica Geométrica (para praticar)

22 de Junho de 2002 – 9 horas
Duração: 3h

1. Considere uma superfície de revolução $Q \subset \mathbb{R}^3$ descrita em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por
$$r = f(z)$$
onde $f :]z_-, z_+[\to \mathbb{R}^+$ é C^∞ e limitada.

(2 val.) a) Mostre que as geodésicas de Q são os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \to \mathbb{R}$ dado em coordenadas locais por
$$L(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2}\left((f(z))^2\dot{\theta}^2 + \left((f'(z))^2 + 1\right)\dot{z}^2\right).$$

(2 val.) b) Mostre que as curvas $\theta =$ constante e as curvas $f'(z) = 0$ (caso existam) são (imagens de) geodésicas.

(2 val.) c) Determine a transformação de Legendre, mostre que L é hiper-regular e escreva a expressão do Hamiltoniano $H : T^*Q \to \mathbb{R}$.

(2 val.) d) Mostre que H é completamente integrável em $T^*Q \setminus N$, onde
$$N = \left\{p_\theta d\theta + p_z dz \in T^*Q : p_z = 0 \text{ e } (p_\theta = 0 \text{ ou } f'(z) = 0)\right\}.$$

(2 val.) e) Mostre que a projecção do toro/cilindro invariante
$$M_{(E,l)} = \{p_\theta d\theta + p_z dz \in T^*Q \setminus N : H = E, p_\theta = l\}$$
em Q é dada em coordenadas locais por
$$f(z) \geq \frac{l}{\sqrt{2E}}.$$
Use este facto para concluir que se f tem um máximo em $z = z_0$ então a geodésica (de imagem) $z = z_0$ é *estável*, i.e., geodésicas com condição inicial próxima de $(\theta_0, z_0, 1, 0) \in TQ$ mantêm-se próximas de $z = z_0$. Confirme a sua conclusão indicando um exemplo.

2. Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ um corpo rígido com um ponto fixo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ cujo movimento é descrito pelo caminho $S : \mathbb{R} \to SO(3)$. Sejam $\dot{S} = SA$ com $A \in \mathfrak{so}(3)$ e $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(A)$, onde $\mathbf{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ é o isomorfismo linear dado por $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$ para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$. Considere uma partícula de massa m cujo movimento **relativamente ao corpo rígido** é dado pelo caminho $\boldsymbol{\xi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Suponha ainda que a força exterior sobre a partícula é $\mathbf{f}$, de modo que a equação do movimento é
$$m\frac{d^2}{dt^2}(S\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}.$$

(2 val.) a) Mostre que a equação do movimento se pode escrever

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}) - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\xi}} - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{\xi}$$

onde $\mathbf{f} = S\mathbf{F}$. (Os termos que surgem a seguir a $\mathbf{F}$ são as chamadas *forças de inércia*, e denominam-se, respectivamente, *força centrífuga*, *força de Coriolis* e *força de Euler*).

(2 val.) b) Justifique que se C é uma esfera homogénea que roda livremente no espaço (como por exemplo a Terra) então a força de Euler é nula. Porque é que uma peça de artilharia no hemisfério Norte tem que ser apontada para a **esquerda** do alvo?

(2 val.) c) Calcule a força que é necessária para manter a partícula imóvel na superfície de um corpo rígido com $I_1 = I_2 \neq I_3$ que roda livremente no espaço.

3. Seja $L : TQ \to \mathbb{R}$ uma Lagrangeano e $\Phi : Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma família a um parâmetro de difeomorfismos. Diz-se que Φ_s *preserva* L se

$$L(v_p) = L(\Phi_{s*} v_p)$$

para todo o $v_p \in TQ$.

(2 val.) a) Mostre que esta condição se escreve em coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$ para TQ na forma

$$L(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n) = L(\Phi_s^1, \ldots, \Phi_s^n, \partial_i \Phi_s^1 \dot{q}^i, \ldots, \partial_i \Phi_s^n \dot{q}^i),$$

e que portanto

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} X^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \partial_j X^i \dot{q}^j = 0,$$

onde

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in \mathcal{X}(Q)$$

é o campo vectorial que gera o grupo a um parâmetro de difeomorfismos.

(2 val.) b) Prove o *Teorema de Noether:* a quantidade

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} X^i$$

é conservada ao longo de qualquer solução das equações de Euler-Lagrange. Ilustre este teorema com um exemplo à sua escolha.