

1ª ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

11 de Março de 2002

1. Mostre que se $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j \in T_p^*Q \otimes T_p^*Q$ então

(i) g é simétrico sse $g_{ij} = g_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$);

(ii) g é não degenerado sse $\det(g_{ij}) \neq 0$;

(iii) g é definido positivo sse (g_{ij}) é uma matriz definida positiva.

2. Dê um exemplo de uma subvariedade N de uma variedade pseudo-Riemanniana (Q, g) tal que a restrição de g a N não seja uma métrica pseudo-Riemanniana em N .

3. Seja G o grupo das transformações afins próprias de \mathbb{R} , i.e., das funções $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g(t) = yt + x$$

com $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Tomando $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ como coordenadas globais induzimos uma estrutura diferenciável em G .

a) Mostre que G com esta estrutura diferenciável é um grupo de Lie.

b) Determine a métrica invariante à esquerda induzida pelo produto interno Euclidiano

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

em $\mathfrak{g} = T_{(0,1)}G$.