Resolução Sumária da
11^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

3 de Junho de 2002

1. Dados $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $\mathbf{A} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$, considere o Lagrangeano com termo magnético

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + e\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - e\Phi = \frac{1}{2}m\dot{x}^i\dot{x}^i + eA^i\dot{x}^i - e\Phi.$$

   a) Mostre que as equações do movimento são

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$$

   onde $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ é o simétrico do gradiente de Φ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ é o rotacional de $\mathbf{A}$. (**Sugestão:** *Recorde que se*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 \textit{ se } (i,j,k) \textit{ não é uma permutação de } (1,2,3) \\ \operatorname{sgn}(i,j,k) \textit{ se } (i,j,k) \textit{ é uma permutação de } (1,2,3) \end{cases}$$

   então $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \varepsilon_{ijk}X^jY^k\partial_i$ *e* $\nabla \times \mathbf{X} = \varepsilon_{ijk}\partial_jY^k\partial_i$*; mostre que* $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$).

   b) Mostre que L é hiper-regular e determine a transformação de Legendre.

   c) Determine o Hamiltoniano do sistema e escreva as equações de Hamilton.

Resolução: As equações do movimento são

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^i + eA^i\right) - e\partial_iA^j\dot{x}^j + e\partial_i\Phi = 0 \\ &\Leftrightarrow m\ddot{x}^i + e\partial_jA^i\dot{x}^j - e\partial_iA^j\dot{x}^j + e\partial_i\Phi = 0 \\ &\Leftrightarrow m\ddot{x}^i = -e\partial_i\Phi + e(\partial_iA^j - \partial_jA^i)\dot{x}^j. \end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} &= \varepsilon_{ijk}\dot{x}^jB^k\partial_i = \varepsilon_{ijk}\dot{x}^j\varepsilon_{klm}\partial_lA^m\partial_i = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\dot{x}^j\partial_lA^m\partial_i \\ &= (\partial_iA^j - \partial_jA^i)\dot{x}^j\partial_i \end{aligned}$$

vemos que

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) \Leftrightarrow m\ddot{x}^i = e[-\partial_i\Phi + (\partial_iA^j - \partial_jA^i)\dot{x}^j].$$

Para ver que L é hiper-regular, basta ver que a transformação de Legendre se escreve em coordenadas locais como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}^i + eA^i \Leftrightarrow \dot{x}^i = \frac{p_i - eA^i}{m}$$

e que portanto é invertível. Finalmente, o Hamiltoniano escreve-se em coordenadas locais na forma

$$\begin{aligned} H = p_i\dot{x}^i - L &= (m\dot{x}^i + eA^i)\dot{x}^i - \frac{1}{2}m\dot{x}^i\dot{x}^i - eA^i\dot{x}^i + e\Phi \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^i\dot{x}^i + e\Phi = \frac{(p_i - eA^i)(p_i - eA^i)}{2m} + e\Phi, \end{aligned}$$

pelo que as equações de Hamilton são

$$\begin{cases} \dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}^i = \dfrac{p_i - eA^i}{m} \\ \dot{p}_i = e\partial_i A^j \dfrac{p_j - eA^j}{m} - e\partial_i \Phi \end{cases}$$

2. Mostre que qualquer variedade de dimensão 2 orientável possui uma estrutura simpléctica.

   Resolução: Se M é uma variedade de dimensão 2 orientável, existe uma forma de volume $\omega \in \Omega^2(M)$, que é não-degenerada (em coordenadas locais quaisquer (x, y) teremos $\omega = f(x, y)dx \wedge dy$ para alguma função f que não se anula nessa vizinhança de coordenadas, e portanto $\det(\omega) = f^2 \neq 0$). Por outro lado $d\omega$ é uma 3-forma, e portanto é necessariamente nula na 2-variedade M, pelo que ω é fechada. Concluimos que (M, ω) é uma variedade simpléctica.

3. Dê exemplos de:

   a) Um campo localmente hamiltoniano que não seja hamiltoniano.
   b) Uma variedade de Poisson que não seja simpléctica.
   c) Uma variedade de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$ e uma função *não constante* $C \in C^\infty(M)$ tal que $\{C, F\} = 0$ para todo o $F \in C^\infty(M)$. Será isto possível numa variedade simpléctica?

   Resolução:

   a) Basta tomar uma variedade simpléctica M onde exista uma 1-forma θ fechada mas não exacta e tomar (o único) $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que

   $$X \rfloor \omega = -\theta.$$

   Localmente, o Lema de Poincaré implica que $\theta = dH$ para algum $H \in C^\infty(M)$, e portanto X é localmente hamiltoniano; mas globalmente não podemos ter $\theta = dH$, pois θ não é exacta. Para um exemplo concreto, podemos por exemplo tomar $M = T^2 = S^1 \times S^1$ com coordenadas $(\varphi^1, \varphi^2) \mod 2\pi$, com forma simpléctica dada pela forma de volume usual $\omega = d\varphi^1 \wedge d\varphi^2$. Então por exemplo $X = \frac{\partial}{\partial \varphi^1}$ é localmente hamiltoniano, já que

   $$X \rfloor \omega = d\varphi^2$$

   é fechada mas não exacta.

b) Por exemplo qualquer variedade M de dimensão ímpar com o parêntesis de Poisson trivial,

$$\{F, G\} = 0$$

para todas as funções $F, G \in C^\infty(M)$. Como M tem dimensão ímpar não pode ser uma variedade simpléctica.

Um exemplo menos trivial pode ser obtido definindo em $\mathbb{R}^3$ com coordenadas globais (x, y, z) o parêntesis de Poisson

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}.$$

Como esta é exactamente a expressão do parêntesis de Poisson em $\mathbb{R}^2$ com coordenadas globais (x, y) e forma simpléctica $dx \wedge dy$, é fácil ver que de facto verifica todas as propriedades de um parêntesis de Poisson; como $\mathbb{R}^3$ tem dimensão ímpar, não pode ser uma variedade simpléctica.

Um exemplo ainda mais interessante (mas cuja verificação é não trivial!) é $\mathbb{R}^3$ com o parêntesis de Poisson dado em notação vectorial por

$$\{F, G\}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\nabla F \times \nabla G).$$

Este parêntesis de Poisson está relacionado com o estudo do corpo rígido.

c) Para cada um dos três exemplos acima: qualquer função não constante, $C(x, y, z) = z$, $C(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$. Uma vez que

$$\{C, F\} = 0 \Leftrightarrow X_C(F) = 0,$$

vemos que a função C satisfaz $X_C = 0$. Se M é simpléctica, isto implica $X_C \rfloor \omega = 0$, ou seja, $dC = 0$, e portanto C tem que ser constante.

Funções $C \in C^\infty(M)$ que satisfazem $\{C, F\} = 0$ para qualquer $F \in C^\infty(M)$ dizem-se *funções de Casimir* ; a função $C(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ foi precisamente a função estudada por Casimir, que estava interessado em quantizar o corpo rígido.