

2ª ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

15 de Março de 2002

1. Considere as coordenadas locais (θ, φ) usuais em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definidas pela parametrização $\mathbf{g} :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

- a) Determine a expressão nestas coordenadas da métrica Riemanniana induzida em S^2 pela métrica Euclidiana usual em \mathbb{R}^3 .
- b) Calcule os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita associados a estas coordenadas locais.
- c) Mostre que as geodésicas são círculos máximos (**Sugestão:** note que pode sempre escolher as coordenadas por forma a que a condição inicial da geodésica satisfaça $(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = (\frac{\pi}{2}, 0, \dot{\theta}, 0)$).
- d) Seja $c : [0, 2\pi] \rightarrow S^2$ dado por $(\theta, \varphi) = (\theta_0, t)$, onde $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (portanto c não é uma geodésica). Seja V um campo vectorial paralelo ao longo de c tal que $V(0) = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Calcule o ângulo pelo qual V é rodado quando regressa ao ponto inicial. Será a conexão de Levi-Civita de S^2 com a métrica induzida uma conexão plana? (**Nota:** O ângulo que calculou é exactamente o ângulo pelo qual o plano de oscilação do Pêndulo de Foucault - i.e., um pêndulo suficientemente comprido e pesado para oscilar durante dias - roda ao longo de um dia num local à latitude $\frac{\pi}{2} - \theta_0$; a razão para isto é que o plano de oscilação do pêndulo permanece fixo em relação às estrelas à medida que a Terra roda sobre o seu eixo).
2. Mostre que se (q^1, \dots, q^n) são coordenadas locais no espaço de configurações Q de um sistema mecânico então

$$\mu \left(\frac{D\dot{q}}{dt} \right) = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} \right] dq^i.$$

onde $\mu : TQ \rightarrow T^*Q$ é o operador massa e $K : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ é a energia cinética.