Resolução Sumária da
4^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

10 de Abril de 2002

1. Seja $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ e $(N, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ uma subvariedade com a métrica induzida e conexão de Levi-Civita D.

   a) Mostre que
   $$D_X Y = \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^{\top}$$
   para todo o $X, Y \in \mathcal{X}(N)$, onde $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são extensões quaisquer de X, Y a $\mathcal{X}(Q)$ e $^{\top} : TQ|_N \to TN$ designa a projecção ortogonal.

   b) Mostre que a *segunda forma fundamental de* N
   $$B(X,Y) = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - D_X Y$$
   está bem definida, e que $B(X,Y)(p) \in T_p^{\perp} N$ é uma função bilinear simétrica de $X(p), Y(p)$ para todo o $p \in N$.

   c) Mostre ainda que se $Z : N \to T^{\perp} N$ é um campo vectorial normal a N então
   $$\langle B(X,Y), Z\rangle = -\langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Resolução: Começamos por notar que se $p \in N$ então $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}(p)$ só depende de $\tilde{X}(p) = X(p)$ e dos valores de $\tilde{Y}$ ao longo de um caminho tangente a $X(p)$; este caminho pode obviamente ser escolhido de forma a que a sua imagem esteja contida em N, e portanto $\tilde{Y} = Y$ ao longo do caminho. Concluimos que na realidade $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ só depende de X e Y. Defina-se então $D : \mathcal{X}(N) \times \mathcal{X}(N) \to \mathcal{X}(N)$ através de
$$D_X Y = (\nabla_X Y)^{\top}$$
e vamos mostrar que D é a conexão de Levi-Civita de N. O facto de D definir uma conexão afim em N segue directamente do facto de ∇ ser uma conexão afim em Q e da linearidade da projecção ortogonal $^{\top} : TQ|_N \to TN$. Por outro lado, dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(N)$ tem-se
$$\begin{aligned}
X \cdot \langle\langle Y, Z\rangle\rangle &= X \cdot \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle (\nabla_X Y)^{\top}, Z\rangle + \langle Y, (\nabla_X Z)^{\top}\rangle \\
&= \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle \\
&= \langle\langle D_X Y, Z\rangle\rangle + \langle\langle Y, D_X Z\rangle\rangle,
\end{aligned}$$

onde usámos o facto de que se $v_p \in T_pN$ então $\langle v_p, w_p \rangle = \langle v_p, w_p^\top \rangle$ para qualquer $w_p \in T_pQ$. Mostrámos portanto que D é compatível com a métrica induzida. Finalmente,

$$D_X Y - D_Y X = (\nabla_X Y)^\top - (\nabla_Y X)^\top = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)^\top = [X, Y]^\top = [X, Y],$$

uma vez que pelo Teorema de Frobenius o parêntesis de Lie de campos vectoriais tangentes a uma subvariedade é tangente a essa subvariedade (note-se que mais uma vez se vê que se $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são extensões de X, Y então $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ só depende de X e Y). Mostrámos portanto que D é simétrica, o que completa a prova de que D é a conexão de Levi-Civita de $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

Do que já se disse é óbvio que

$$B(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp$$

está bem definida e que $B(X, Y)(p) \in T_p^\perp N$. Além disso $B(X, Y)(p)$ é claramente uma função linear de $X(p)$, pelo que se mostrarmos que $B(X, Y) = B(Y, X)$ provamos simultaneamente que B é bilinear e simétrica. Ora

$$B(X, Y) - B(Y, X) = (\nabla_X Y - \nabla_X Y)^\perp = [X, Y]^\perp = 0$$

(novamente devido ao Teorema de Frobenius).

Finalmente, se $Z : N \to T^\perp N$ é um campo vectorial normal a N então

$$\begin{aligned}
\langle B(X, Y), Z \rangle &= \langle (\nabla_X Y)^\perp, Z \rangle = \langle \nabla_X Y - (\nabla_X Y)^\top, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle \\
&= X \cdot \langle Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle = X \cdot 0 - \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\
&= -\langle Y, \nabla_X Z \rangle.
\end{aligned}$$

2. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$ a superfície esférica de raio $r \in \mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^3$ com a métrica induzida pela métrica Euclidiana usual. Mostre que são consequências imediatas do exercício anterior os seguintes factos:

   a) O caminho $q : \mathbb{R} \to S$ dado por

   $$q(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t, 0)$$

   é uma geodésica;

   b) A aceleração $D_{\dot{p}} \dot{p}$ do caminho $p : \mathbb{R} \to S$ dado por

   $$p(t) = (r \operatorname{sen} \theta \cos t, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} t, r \cos \theta)$$

   (com $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$) aponta na direcção do pólo Norte $(0, 0, r)$ (portanto p curva na direcção deste pólo);

   c) A segunda forma fundamental de S é dada por

   $$B(X, Y) = -\frac{1}{r} \langle\langle X, Y \rangle\rangle Z$$

   onde $Z : S \to T^\perp S$ é o vector normal unitário a S.

Resolução: Começamos por observar que o campo normal unitário exterior à esfera é

$$Z(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,z)$$

para todo o $(x,y,z) \in S$.

Uma vez que a conexão ∇ associada à métrica Euclidiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ é plana, tem-se

$$\nabla_{\dot{q}}\dot{q} = \ddot{q} = (-r\cos t, -r\operatorname{sen} t, 0) = -rZ(q(t)) \in T_{q(t)}^{\perp}S$$

e portanto

$$D_{\dot{q}}\dot{q} = (\nabla_{\dot{q}}\dot{q})^{\top} = 0,$$

o que mostra que $q(t)$ é uma geodésica.

Por outro lado

$$\nabla_{\dot{p}}\dot{p} = \ddot{p} = (-r\operatorname{sen}\theta\cos t, -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} t, 0)$$

e portanto

$$\begin{aligned} D_{\dot{p}}\dot{p} = (\nabla_{\dot{p}}\dot{p})^{\top} &= \ddot{p} - \langle \ddot{p}, Z \rangle Z \\ &= (-r\operatorname{sen}\theta\cos t, -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} t, 0) - (-r\operatorname{sen}^2\theta)(\operatorname{sen}\theta\cos t, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} t, \cos\theta) \\ &= (-r\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\cos t, -r\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\operatorname{sen} t, r\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta), \end{aligned}$$

o que mostra que $D_{\dot{p}}\dot{p}$ aponta na direcção do pólo Norte.

Finalmente, dado $X(p) \in T_pN$ podemos escolher coordenadas Cartesianas em $\mathbb{R}^3$ de modo a que $p = (r,0,0)$ e $X = (0, X^2, 0)$. Por linearidade podemos tomar $X = (0,r,0)$, uma vez que se a fórmula a provar for válida para este valor de $X(p)$ será válida para qualquer múltiplo; esta escolha corresponde a escolher $X(p)$ igual à derivada ao longo de $q(t)$ para $t = 0$, já que

$$\dot{q}(0) = (0,r,0).$$

Uma vez que ∇ é plana,

$$\nabla_X Z(p) = \frac{d}{dt}Z(q(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)|_{t=0} = (0,1,0) = \frac{1}{r}X(p)$$

e portanto

$$\langle B(X,Y)(p), Z(p) \rangle = -\langle Y(p), \nabla_X Z(p) \rangle = -\left\langle Y(p), \frac{1}{r}X(p) \right\rangle = -\frac{1}{r}\langle\langle X(p), Y(p) \rangle\rangle.$$

Como $B(X,Y)(p) \in T_p^{\perp}N = \operatorname{span}\{Z(p)\}$, concluimos que

$$B(X,Y)(p) = -\frac{1}{r}\langle\langle X(p), Y(p) \rangle\rangle Z(p).$$

Portanto quanto menor a superfície esférica maior a segunda forma fundamental (por vezes também chamada de *curvatura de Gauss*, ou *curvatura extrínseca*.)