

5ª ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

9 de Abril de 2002

1. Escreva as equações do movimento de um *pêndulo esférico* de comprimento l e massa m , i.e., de uma partícula de massa m que se move sobre a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ sob a acção do campo gravitacional constante. Existe alguma quantidade conservada além da energia? (**Sugestão:** Use coordenadas esféricas (θ, φ) na superfície esférica e recorde que a energia potencial correspondente ao campo gravitacional constante é dada por $U(x, y, z) = mgz$, onde g é a aceleração da gravidade).
2. Mostre que existe um isomorfismo vectorial $\Omega : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$A\xi = \Omega(A) \times \xi$$

para todo o $\xi \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$.

3. Seja C um corpo rígido com um ponto fixo $\mathbf{0} \in C$ e densidade $\rho : \overline{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Suponha que o eixo dos zz é um *eixo de simetria* de C , i.e., suponha que em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) para \mathbb{R}^3 se tem $(r, \theta, z) \in C$ sse $(r, \theta + \pi, z) \in C$ e $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta + \pi, z)$. Mostre que $\mathbb{R}e_z$ é um eixo principal de inércia de C e que o correspondente momento principal de inércia é

$$I_z = \int_C [r(\xi)]^2 \rho(\xi) d^3\xi.$$