Resolução Sumária da
8^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

8 de Maio de 2002

1. Mostre que se a distribuição Σ é dada localmente pelos núcleos das formas $\omega^1, \ldots, \omega^{n-m}$,

$$\Sigma = \ker(\omega^1) \cap \ldots \cap \ker(\omega^{n-m}),$$

então Σ é integrável *sse*

$$d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-m} = 0$$

para $i = 1, \ldots, n-m$.

Resolução: Completamos $\{\omega^1, \ldots, \omega^{n-m}\}$ num co-referencial $\{\omega^1, \ldots, \omega^{n-m}, \theta^1, \ldots \theta^m\}$ e tomamos o referencial dual $\{Y_1, \ldots, Y_{n-m}, X_1, \ldots, X_m\}$. Note-se que $\{X_1, \ldots, X_m\}$ é uma base local para a distribuição Σ. A condição

$$d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-m} = 0$$

equivale à condição de que as componentes de $d\omega^i$ em $\theta^j \wedge \theta^k$ sejam nulas, i.e., à condição de que $d\omega^i$ se anule em Σ. Por outro lado, temos

$$d\omega^i(X_j, X_k) = X_j \cdot \omega^i(X_k) - X_k \cdot \omega^i(X_j) - \omega^i([X_j, X_k]) = -\omega^i([X_j, X_k]),$$

uma vez que $\omega^i(X_j) = 0$. Concluimos então que

$$\begin{aligned}
\Sigma \text{ é integrável} &\Leftrightarrow [X_j, X_k] \in \Sigma \quad (j,k = 1, \ldots, m) \\
&\Leftrightarrow \omega^i([X_j, X_k]) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-m;\ j,k = 1, \ldots, m) \\
&\Leftrightarrow d\omega^i(X_j, X_k) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-m;\ j,k = 1, \ldots, m) \\
&\Leftrightarrow d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-m} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-m).
\end{aligned}$$

2. Uma roda de raio R rolando no plano xOy sem escorregar define no espaço de configurações $Q = S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 \ni (\varphi, \psi, x, y)$ a restrição

$$\Sigma = \ker(dx - R\cos\varphi d\psi) \cap \ker(dy - R \operatorname{sen}\varphi d\psi).$$

a) Mostre que se trata de uma restrição não holónoma.

b) Mostre que existe um caminho compatível com esta restrição unindo dois quaisquer pontos do espaço de configurações.

c) Supondo que a energia cinética da roda é dada por

$$K = \frac{I}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

escreva as equações do movimento e resolva-as. Qual o significado físico da força de reacção?

Resolução: Para ver que se trata de uma restrição não holónoma basta ver que por exemplo

$$d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = R \operatorname{sen}\varphi d\varphi \wedge d\psi \wedge dx \wedge dy \neq 0.$$

Para construir um caminho compatível com a restrição unindo os pontos $(\varphi_1, \psi_1, x_1, y_1)$ e $(\varphi_2, \psi_2, x_2, y_2)$ começamos por observar que os caminhos do tipo

$$\begin{aligned}
&\alpha(t) = (\varphi_0 + f(t), \psi_0, x_0, y_0);\\
&\beta(t) = (\varphi_0, \psi_0 + f(t), x_0 + R\cos\varphi_0 f(t), y_0 + R\operatorname{sen}\varphi_0 f(t)),
\end{aligned}$$

onde $\varphi_0, \psi_0, x_0, y_0$ são constantes e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ crescente tal que todas as suas derivadas se anulam em $t = 0, 1$, são compatíveis com a restrição. Além disso, concatenando caminhos deste tipo obtêm-se caminhos de classe C^∞ compatíveis com a restrição.

Sendo $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, existe um caminho do tipo α que leva $(\varphi_1, \psi_1, x_1, y_1)$ em $(\theta, \psi_1, x_1, y_1)$. Concatenamos este caminho com um caminho do tipo β que leva $(\theta, \psi_1, x_1, y_1)$ em (θ, ξ, x_2, y_2), onde $\xi = \psi_1 + \frac{r}{R}$. Se $\xi + 2\eta = \psi_2 \mod 2\pi$, concatenamos um caminho do tipo β que leva (θ, ξ, x_2, y_2) em $(\theta, \xi+\eta, x_2+a, y_2+b)$, onde $(a, b) = R\eta(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, com um caminho do tipo α que leva $(\theta, \xi + \eta, x_2 + a, y_2 + b)$ em $(\theta+\pi, \xi+\eta, x_2+a, y_2+b)$, com um caminho do tipo β que leva $(\theta+\pi, \xi+\eta, x_2+a, y_2+b)$ em $(\theta + \pi, \xi + 2\eta, x_2, y_2) = (\theta + \pi, \psi_2, x_2, y_2)$. Finalmente, existe um caminho do tipo α que leva $(\theta + \pi, \psi_2, x_2, y_2)$ em $(\varphi_2, \psi_2, x_2, y_2)$.

As equações do movimento são

$$\mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) = \mathcal{R},$$

onde

$$\mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i}\right] dq^i$$
$$= I\ddot{\psi}d\psi + J\ddot{\varphi}d\varphi + M\ddot{x}dx + M\ddot{y}dy$$

e

$$\mathcal{R} = \lambda_1(dx - R\cos\varphi d\psi) + \lambda_2(dy - R\operatorname{sen}\varphi d\psi)$$

para certas funções λ_1, λ_2 a determinar. Juntado às equações do movimento as equações de restrição, temos então

$$\begin{cases} J\ddot{\varphi} = 0 \\ I\ddot{\psi} = -R\cos\varphi\lambda_1 - R\operatorname{sen}\varphi\lambda_2 \\ M\ddot{x} = \lambda_1 \\ M\ddot{y} = \lambda_2 \\ \dot{x} = R\cos\varphi\dot{\psi} \\ \dot{y} = R\operatorname{sen}\varphi\dot{\psi} \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$ é constante; derivando a quinta equação e usando a terceira vem

$$\lambda_1 = MR(-\omega\operatorname{sen}\varphi\dot{\psi} + \cos\varphi\ddot{\psi}),$$

e analogamente

$$\lambda_2 = MR(\omega\cos\varphi\dot{\psi} + \operatorname{sen}\varphi\ddot{\psi}).$$

Substituindo na segunda equação obtemos

$$(I + MR^2)\ddot{\psi} = 0 \Leftrightarrow \psi(t) = \Omega t + \psi_0$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}$ é constante. Finalmente da quinta equação vem (supondo $\omega \neq 0$)

$$\dot{x} = R\Omega\cos\varphi \Leftrightarrow x(t) = R\frac{\Omega}{\omega}\operatorname{sen}\varphi + x_0$$

e analogamente

$$\dot{y} = R\Omega\operatorname{sen}\varphi \Leftrightarrow y(t) = -R\frac{\Omega}{\omega}\cos\varphi + y_0.$$

Como vimos acima,

$$\lambda_1 = MR(-\omega\operatorname{sen}\varphi\dot{\psi} + \cos\varphi\ddot{\psi}) = -MR\omega\Omega\operatorname{sen}\varphi;$$
$$\lambda_2 = MR(\omega\cos\varphi\dot{\psi} + \operatorname{sen}\varphi\ddot{\psi}) = MR\omega\Omega\cos\varphi,$$

donde se conclui que

$$\mathcal{R} = -MR\omega\Omega\operatorname{sen}\varphi dx + MR\omega\Omega\cos\varphi dy$$

A força de reacção pode ser interpretada como uma força de atrito normal à trajectória da roda no plano xOy que obriga a roda a curvar por forma ao seu movimento ser compatível com a restrição.