9^{a} ficha de exercícios de Mecânica Geométrica

15 de Maio de 2002

1. a) Dê um exemplo de uma variedade Riemanniana contendo dois pontos pelos quais não passa qualquer geodésica.
   b) Dê um exemplo de uma variedade Riemanniana contendo dois pontos pelos quais passam infinitas geodésicas.
   c) Mostre que em $\mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ não existem caminhos de comprimento máximo unindo $(0,0)$ a $(1,0)$.
   d) Mostre que em $\mathbb{R}^2$ com a métrica de Minkowski $-dt \otimes dt + dx \otimes dx$ não existem caminhos de comprimento mínimo unindo $(0,0)$ a $(1,0)$ que sejam imersões.
   e) Mostre que em $\mathbb{R}^3$ com a métrica de Minkowski $-dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy$ existe um caminho de comprimento zero (portanto mínimo) unindo os pontos $(0,1,0)$ e $(2\pi,1,0)$ que é uma imersão mas não uma geodésica.

2. **(Problema Braquistócrono)**: Uma partícula de massa m move-se sobre uma curva $y = y(x)$ sob a acção do campo gravitacional constante, $U = mgy$. A curva satisfaz $y(0) = y(d) = 0$ e $y(x) < 0$ para $0 < x < d$.

   a) Supondo que a partícula é largada da origem com velocidade nula, mostre que a norma da sua velocidade é
   $$v = \sqrt{-2gy}.$$
   Conclua que o tempo que a partícula demora a viajar entre a origem e o ponto $(d,0)$ é
   $$S = \int_0^d \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}} dx = (2g)^{-\frac{1}{2}} \int_0^d (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} (-y)^{-\frac{1}{2}} dx$$
   onde $y' = \frac{dy}{dx}$.
   b) Escreva uma equação diferencial para a curva $y = y(x)$ que leva a partícula a viajar entre os dois pontos em tempo mínimo. Mostre que esta equação pode ser reduzida a
   $$\frac{d}{dx}\left[\left(1+y'^2\right) y\right] = 0.$$
   c) Verifique que a solução da equação acima que satisfaz $y(0) = y(d) = 0$ é dada parametricamente por
   $$\begin{cases} x = R\theta - R \operatorname{sen}\theta \\ y = -R + R\cos\theta \end{cases}$$
   onde $d = 2\pi R$. (Esta curva chama-se uma *ciclóide*, e é a curva descrita por um ponto numa circunferência que roda sem escorregar sobre o eixo dos xx).