Resumos de Mecânica Geométrica

25 de Junho de 2002

I. Variedades Pseudo-Riemannianas

1. Uma *variedade pseudo-Riemanniana* é um par (Q, g), onde Q é uma variedade diferenciável e $g \in \mathcal{T}_2^0(Q)$ é simétrico e não degenerado (dito uma *métrica pseudo-Riemanniana* em Q.) Se além disso g é definido positivo, (Q, g) diz-se uma *variedade Riemanniana*.
2. Seja (Q, g) uma variedade Riemanniana e $f : N \to Q$ uma imersão. Então $h \in \mathcal{T}_2^0(N)$ definido por
$$h(v_p, w_p) = g(f_* v_p, f_* w_p)$$
para $v_p, w_p \in T_p N, p \in N$ define uma métrica Riemanniana em N, dita a *métrica induzida* por g em N.
3. Se (Q, g) e (M, h) são variedades pseudo-Riemannianas, um difeomorfismo $f : Q \to M$ diz-se uma *isometria* se
$$h(f_* v_p, f_* w_p) = g(v_p, w_p)$$
para quaisquer $v_p, w_p \in T_p Q, p \in Q$.
4. Um *grupo de Lie* G é um grupo com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação
$$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy^{-1} \in G$$
é de classe C^∞.
5. Dado um grupo de Lie G e $x \in G$, define-se a *translacção esquerda (direita) por* x como sendo o difeomorfismo $L_x : G \to G$ ($R_x : G \to G$) dado por $L_x(y) = xy$ ($R_x(y) = yx$) para todo o $y \in G$. Uma métrica pseudo-Riemanniana g em G diz-se *invariante à esquerda (direita)* se L_x (R_x) é uma isometria para todo o $x \in G$.
6. Se G é um grupo de Lie, $\mathfrak{g} = T_e G$ diz-se a sua *álgebra de Lie* (onde $e \in G$ é o elemento neutro do grupo).
7. $g(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica invariante à esquerda no grupo de Lie G *sse*
$$\langle v_x, w_x \rangle_x = \langle (L_{x^{-1}})_* v_x, (L_{x^{-1}})_* w_x \rangle_e$$
para todo o $x \in G$. Portanto qualquer forma bilinear simétrica não degenerada em $\mathfrak{g}$ define uma métrica invariante à esquerda em G.
8. Se $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade pseudo-Riemanniana e $c : \mathbb{R} \to Q$ é um mergulho, o *comprimento* do segmento $c([a, b])$ é dado por
$$\int_a^b |\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle|^{\frac{1}{2}} \, dt.$$

9. Uma *conexão afim* numa variedade diferenciável Q é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(Q) \times \mathcal{X}(Q) \to \mathcal{X}(Q)$ tal que
   (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
   (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
   (iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

   para todo o $X, Y, Z \in \mathcal{X}(Q), f, g \in C^\infty(Q)$.
10. Seja ∇ uma conexão afim em Q, $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$, $p \in Q$. Então $\nabla_X Y(p) \in T_pQ$ só depende de $X(p)$ e dos valores de Y ao longo de uma curva tangente a X em p. Se $(x^1, \ldots, x^n)$ são coordenadas locais em torno de p,
$$\nabla_X Y = \left(X \cdot Y^i + \Gamma^i_{jk} X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$
   onde as n^3 funções $\Gamma^i_{jk} : Q \to \mathbb{R}$, ditas os *símbolos de Christoffel*, são definidas através de
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$
11. Um campo vectorial X definido ao longo de um caminho $c : \mathbb{R} \to Q$ diz-se *paralelo ao longo de* c se
$$\frac{DX}{dt} \equiv \nabla_{\dot{c}} X = 0.$$
   O caminho c diz-se uma *geodésica* da conexão ∇ se
$$\frac{D\dot{c}}{dt} = 0.$$
   Em coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$ as equações das geodésicas são
$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$
12. Uma conexão ∇ numa variedade pseudo-Riemanniana $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ diz-se *compatível* com a métrica se
$$X \cdot \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$
   para todo o $X, Y, Z \in \mathcal{X}(Q)$. Em particular isto significa que um referencial ortonormado transportado paralelamente ao longo de uma curva permanece ortonormado.
13. A conexão ∇ diz-se *simétrica* se
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$
   para todo o $X, Y, Z \in \mathcal{X}(Q)$. Em coordenadas locais isto traduz-se na condição
$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \quad (i, j, k = 1, \ldots, n).$$
14. *Teorema de Levi-Civita:* Dada uma variedade pseudo-Riemanniana $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ existe uma única conexão ∇ em Q tal que
   (i) ∇ é simétrica;
   (ii) ∇ é compatível com $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Em coordenadas locais os símbolos de Christoffel para esta conexão são

$$\Gamma_{jk}^{i} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk})$$

onde $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1}$ e $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

15. Se $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é pseudo-Riemanniana e $c : \mathbb{R} \to Q$ é uma geodésica (da conexão de Levi-Civita) então $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle$ é constante. A geodésica diz-se do tipo
   (i) *Espaço* se $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle > 0$;
   (ii) *Tempo* se $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle < 0$;
   (iii) *Luz* se $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$.

   Se a geodésica é do tipo espaço ou tempo então o parâmetro t da geodésica é proporcional ao comprimento de arco.

II. Sistemas Mecânicos em Variedades Riemannianas

1. Um *sistema mecânico* é um triplo $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$, onde Q é uma variedade diferenciável, dita o *espaço de configurações*, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica Riemanniana em Q e $\mathcal{F} : TQ \to T^*Q$, dita a *força exterior*, satisfaz $\mathcal{F}(T_pQ) \subset T_p^*Q$ para todo o $p \in Q$.
2. Dado um sistema mecânico $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$,
   (i) A *energia cinética* é a aplicação C^∞ $K : TQ \to \mathbb{R}$ dada por

   $$K(v_p) = \frac{1}{2} \langle v_p, v_p \rangle$$

   para todo o $v_p \in T_pQ, p \in Q$; em coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n)$,

   $$K\left(\dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

   (ii) O *operador massa* é a aplicação C^∞ $\mu : TQ \to T^*Q$ dada por

   $$\mu(v_p) = \langle v_p, \cdot \rangle \in T_p^*Q$$

   para todo o $v_p \in T_pQ, p \in Q$; em coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n)$,

   $$\mu\left(\dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}\right) = g_{ij} \dot{q}^i dq^j.$$

   (iii) $\mathcal{F}$ diz-se *posicional* se é constante ao longo das fibras, i.e., se $\mathcal{F}(v_p) = \mathcal{F}(w_p)$ para todo o $v_p, w_p \in T_pQ, p \in Q$.
   (iv) $\mathcal{F}$ diz-se *conservativa* se existe $U : Q \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F}(v_p) = -dU(p)$ para todo o $p \in Q$ (em particular qualquer força conservativa é posicional); a função U diz-se a *energia potencial*.
3. Dado um sistema mecânico $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$, a *Lei de Newton* é a equação diferencial

   $$\mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) = \mathcal{F}(\dot{q})$$

   onde

   $$\frac{D\dot{q}}{dt} \equiv \nabla_{\dot{q}} \dot{q}$$

   é a *aceleração* da curva (∇ é a conexão de Levi-Civita). Uma solução $q : \mathbb{R} \to Q$ da equação de Newton diz-se um *movimento* do sistema mecânico.

4. Em coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n)$ tem-se

$$\mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i}\right] dq^i.$$

Em particular se $\mathcal{F} = -dU$ é conservativa as equações do movimento são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i}.$$

5. Num sistema mecânico conservativo $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU)$ a energia mecânica $E_m = K + U$ é constante ao longo de qualquer movimento.
6. Os ponto críticos da energia mecânica $E_m : TQ \to \mathbb{R}$ dão os levantamentos para a secção nula de TQ dos pontos críticos de $U : Q \to \mathbb{R}$, e coincidem com os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico definido pela Lei de Newton no espaço de fase TQ.
7. Seja $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU)$ um sistema mecânico e $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q_h = \{p \in Q : U(p) < h\} \neq \varnothing.$$

A *métrica de Jacobi* na variedade Q_h é dada por

$$\langle\langle v_p, w_p \rangle\rangle = 2[h - U(p)]\langle v_p, w_p \rangle$$

para todo o $v_p, w_p \in T_pQ, p \in Q$.
8. *Teorema de Jacobi:* Os movimentos de um sistema mecânico conservativo $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU)$ com energia mecânica h são, a menos de reparametrização, geodésicas da métrica de Jacobi na variedade Q_h.
9. Uma curva $c : \mathbb{R} \to Q$ é uma geodésica reparametrizada *sse* satisfaz a equação

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = f(t)\dot{c}$$

para $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
10. Seja $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ e $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = e^{2\rho}\langle\cdot,\cdot\rangle$ uma métrica conformemente relacionada com $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (onde $\rho \in C^\infty(Q)$). Então a conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é dada por

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - \langle X, Y\rangle \operatorname{grad}\rho$$

para todo o $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$, onde $\operatorname{grad}\rho$ é definido por $\langle \operatorname{grad}\rho, Z\rangle = d\rho(Z)$ para todo o $Z \in \mathcal{X}(Q)$.
11. Uma *restrição holónoma* é uma subvariedade $N \subset Q$ tal que $\dim N < \dim Q$. Uma curva $q : \mathbb{R} \to Q$ diz-se *compatível* com N se $q(t) \in N$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.
12. Uma *força de reacção* num sistema mecânico com restrição holónoma $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathcal{F}, N)$ é uma aplicação $\mathcal{R} : TN \to T^*Q$ com $\mathcal{R}(T_pN) \subset T_p^*Q$ para todo o $p \in N$ tal que as soluções da *Lei de Newton generalizada*

$$\mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) = (\mathcal{F} + \mathcal{R})(\dot{q})$$

com condição inicial em TN são compatíveis com N. Diz-se que a força de reacção é *perfeita*, ou que satisfaz o *princípio de D'Alembert*, se

$$\mu^{-1}\mathcal{R}(v_p) \in T_p^\perp N$$

para todo o $v_p \in T_pN, p \in N$.

13. Dado um sistema mecânico com restrição holónoma $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathcal{F}, N)$ existe uma única força de reacção $\mathcal{R} : TN \to T^*Q$ que satisfaz o princípio de D'Alembert. As soluções da Lei de Newton generalizada

$$\mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) = (\mathcal{F} + \mathcal{R})(\dot{q})$$

são exactamente os movimentos do sitema mecânico $(N, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle, \mathcal{F}_N)$, onde $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é a métrica induzida em N por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\mathcal{F}_N$ é a restrição de $\mathcal{F}$ a TN. Em particular, se $\mathcal{F} = -dU$ é conservativa então $\mathcal{F}_N = -d\left(U|_N\right)$.

14. Seja $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ e $(N, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ uma subvariedade com a métrica induzida e conexão de Levi-Civita D. Então

$$D_X Y = \left(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)^\top$$

para todo o $X, Y \in \mathcal{X}(N)$, onde $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são extensões quaisquer de X, Y a $\mathcal{X}(Q)$ e $^\top : TQ|_N \to TN$ designa a projecção ortogonal. Além disso,

$$B(X,Y) = \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} - D_X Y$$

(dita a *segunda forma fundamental de* N) está bem definida, e $B(X,Y)(p) \in T_p^\perp N$ é uma função bilinear simétrica de $X(p), Y(p)$ para todo o $p \in N$.

III. Corpo Rígido

1. Um *corpo rígido com um ponto fixo* é qualquer sistema mecânico da forma $(SO(3), \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle, \mathcal{F})$, onde

$$\langle\langle\dot{S}_1, \dot{S}_2\rangle\rangle = \int_C \langle\dot{S}_1\boldsymbol{\xi}, \dot{S}_2\boldsymbol{\xi}\rangle\rho(\boldsymbol{\xi})d^3\xi$$

para algum aberto conexo limitado $C \subset \mathbb{R}^3$ contendo $\mathbf{0}$, dita a *configuração inicial*, e alguma função contínua $\rho : \overline{C} \to \mathbb{R}^+$, dita a *densidade de massa* ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ designa o produto interno Euclidiano usual em $\mathbb{R}^3$).

2. A métrica $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ definida em $SO(3)$ por um corpo rígido com um ponto fixo é invariante à esquerda (portanto existem tantos corpos rígidos com um ponto fixo como produtos internos definidos positivos em $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$, i.e., como matrizes reais 3×3 simétricas definidas positivas).

3. Usando a identificação

$$\mathbb{R}^9 \simeq M_3(\mathbb{R}) \supset SO(3)$$

temos

$$T_S SO(3) = \{SA : A^t = -A\} = \{SA : A \in \mathfrak{so}(3)\} = (L_S)_*\,\mathfrak{so}(3).$$

$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é invariante è esquerda *sse*

$$\langle\langle SA, SB\rangle\rangle_S = \langle\langle A, B\rangle\rangle_I.$$

4. O *momento angular* de um corpo rígido cujo movimento é descrito por $S : \mathbb{R} \to SO(3)$ é o vector
$$\mathbf{p}(t) = \int_C \left[(S(t)\boldsymbol{\xi}) \times \left(\dot{S}(t)\boldsymbol{\xi} \right) \right] \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi.$$
Se $S : \mathbb{R} \to SO(3)$ é uma geodésica de $(SO(3), \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ então $\mathbf{p}(t)$ é constante.
5. Existe um isomorfismo vectorial $\boldsymbol{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$A\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$$
para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$.
6. O operador linear $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por
$$I(\mathbf{v}) = \int_C [\boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\xi})] \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi$$
diz-se o *tensor de inércia* do corpo rígido.
7. O tensor de inércia de um corpo rígido é um operador linear simétrico definido positivo e
$$K = \frac{1}{2} \langle\langle \dot{S}, \dot{S} \rangle\rangle_S = \frac{1}{2} \langle\langle SA, SA \rangle\rangle_S = \frac{1}{2} \langle I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle,$$
onde $\dot{S} = SA$ e $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(A)$.
8. Existe uma base ortonormada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ na qual I admite a representação $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Os eixos $\mathbb{R}\mathbf{e}_1, \mathbb{R}\mathbf{e}_2, \mathbb{R}\mathbf{e}_3$ dizem-se os *eixos principais de inércia* e os valores próprios I_1, I_2, I_3 os *momentos principais de inércia* de C.
9. Se o eixo dos zz é um *eixo de simetria* de C, i.e., se em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) para $\mathbb{R}^3$ se tem $(r, \theta, z) \in C$ *sse* $(r, \theta + \pi, z) \in C$ e $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta + \pi, z)$, então $\mathbb{R}\mathbf{e}_z$ é um eixo principal de inércia de C e o correspondente momento principal de inércia é
$$I_z = \int_C [r(\boldsymbol{\xi})]^2 \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi.$$
10. *Equações de Euler:* As equações do movimento do corpo rígido com 1 ponto fixo na ausência de forças exteriores são dadas por
$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (I\boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega}.$$
Na base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dos eixos principais de inércia, estas equações escrevem-se
$$\begin{cases} I_1\dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 \\ I_2\dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 \\ I_3\dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 \end{cases}$$
11. $S\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ é a *velocidade angular instantânea* do corpo rígido: em cada instante, o corpo roda em torno de $\mathbb{R}\boldsymbol{\omega}$ com velocidade angular $\|\boldsymbol{\omega}\|$. Portanto $\boldsymbol{\Omega}$ é a velocidade angular no referencial (acelerado) ligado ao corpo rígido.

12. Se $I_1 > I_2 > I_3$, os pontos de equilíbrio das equações de Euler são dados por

$$\mathbf{\Omega} = \pm\|\mathbf{\Omega}\|\mathbf{e}_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e são estáveis para $i = 1, 3$ e instáveis para $i = 2$.

13. O *elipsóide de inércia* é o conjunto

$$E = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \langle I\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle = 1\}.$$

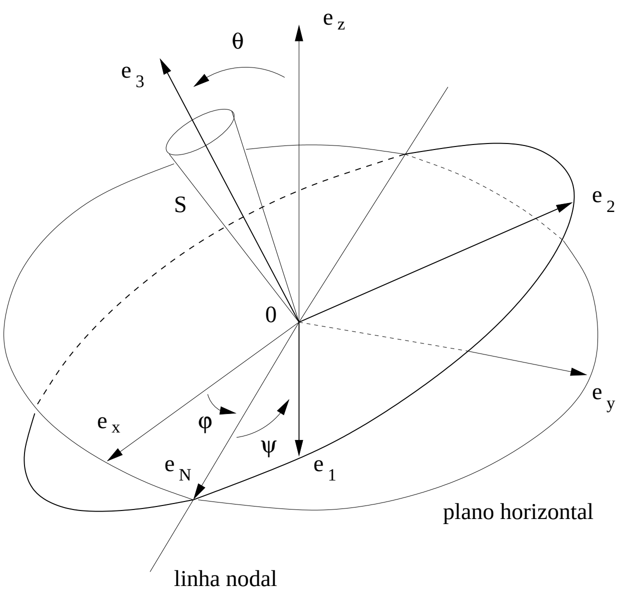
14. *Teorema de Poinsot:* Se $S : \mathbb{R} \to SO(3)$ é um movimento do corpo rígido com um ponto fixo na ausência de forças exteriores, então $S(t)E$ rola sem escorregar sobre um plano fixo perpendicular ao momento angular (constante) $\mathbf{p}$, onde E é o elipsóide de inércia.

15. Se $I_1 > I_2 > I_3$, as rotações em torno de $\mathbb{R}\mathbf{e}_1, \mathbb{R}\mathbf{e}_3$ são estáveis não só para $\mathbf{\Omega}(t)$ mas também para $\boldsymbol{\omega}(t)$.

16. *Ângulos de Euler:* Correspondem às coordenadas locais $(\theta, \varphi, \psi) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ em $SO(3)$ definidos por

$$S(\theta,\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A interpretação geométrica destes ângulos é a indicada na figura.



17. Se $I_1 = I_2$ então a energia cinética do corpo rígido com um ponto fixo nas coordenadas locais $(\theta, \varphi, \psi, \dot\theta, \dot\varphi, \dot\psi)$ de $TSO(3)$ é dada por

$$K = \frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2.$$

18. *Pião de Lagrange:* Assumindo que o centro de massa de C é um ponto do eixo dos zz,

$$\boldsymbol{\xi}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \int_C \boldsymbol{\xi} \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi = l\mathbf{e}_z$$

(onde $M = \int_C \rho(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi$ é a massa de C), e que a única força exterior provém do campo gravitacional constante, obtém-se um sistema mecânico conservativo com energia potencial

$$U = Mgl\cos\theta.$$

19. A inclinação θ do eixo do pião de Lagrange em relação à vertical varia no tempo da mesma forma que no sistema unidimensional com energia

$$\tilde{E} = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(P_z - P_3\cos\theta)^2}{2I_1 \operatorname{sen}^2\theta} + Mgl\cos\theta,$$

onde $P_z = \dfrac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}$ e $P_3 = \dfrac{\partial K}{\partial \dot{\psi}}$ são constantes do movimento.

20. Uma condição necessária para a estabilidade da posição vertical do pião é

$$(P_3)^2 > 4I_1 Mgl.$$

21. *O pião veloz:* Para $(P_3)^2 > (P_z)^2$ e

$$\varepsilon = \frac{I_1 Mgl}{(P_3)^2}$$

suficientemente pequeno θ possui um ponto de equilíbrio estável próximo do ângulo θ_0 tal que $P_z - P_3\cos\theta_0 = 0$. A frequência das oscilações de soluções periódicas próximas deste ponto de equilíbrio, dita *frequência de nutação*, é dada assimptoticamente por

$$\omega_{NUT} \sim \frac{P_3}{I_1}.$$

Se o eixo do pião se encontra imóvel no instante inicial ($\dot{\varphi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$), então a amplitude de nutação é dada pela expressão assimptótica

$$a_{NUT} \sim \frac{I_1 Mgl \operatorname{sen}\theta_0}{(P_3)^2},$$

e o valor médio de $\dot{\varphi}$, dita a *frequência de precessão*, por

$$\omega_{PREC} \sim \frac{Mgl}{P_3}.$$

IV. Restrições Não Holónomas

1. Uma *distribuição* de subespaços de dimensão $m < n = \dim Q$ é um subfibrado

$$\Sigma = \bigcup_{p \in Q} \Sigma_p \subset TQ$$

tal que $\Sigma_p \subset T_pQ$ é um subespaço de dimensão m. A distribuição diz-se C^∞ se para todo o $p \in Q$ existe uma vizinhança $U \ni p$ e campos $X_1, \ldots, X_m \in \mathcal{X}(U)$ tais que

$$\Sigma_q = \mathrm{span}\{X_{1q}, \ldots, X_{mq}\}$$

para todo o $q \in U$. A distribuição diz-se *integrável* se Q é folheada por *subvariedades integrais*, i.e., subvariedades imersas $N \subset Q$ de dimensão m tais que

$$\Sigma_p = T_pN$$

para todo o $p \in N$. Se $X \in \mathcal{X}(U)$ nsatisfaz $X_p \in \Sigma_p$ para todo o $p \in U$ escrevemos abreviadamente $X \in \Sigma$.

2. *Teorema de Frobenius:* Uma distribuição C^∞ Σ é integrável *sse* $X, Y \in \Sigma \Rightarrow [X, Y] \in \Sigma$.
3. *Fórmula Mágica de Cartan:* Se $\omega \in \Omega^k(Q)$ e $X \in \mathcal{X}(Q)$ então

$$\pounds_X \omega = X \rfloor d\omega + d(X \rfloor \omega).$$

4. Se $\omega \in \Omega^1(Q)$ e $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$ então

$$d\omega(X, Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]).$$

5. Se a distribuição Σ é dada localmente pelos núcleos das formas $\omega^1, \ldots, \omega^{n-m}$,

$$\Sigma = \ker(\omega^1) \cap \ldots \cap \ker(\omega^{n-m}),$$

então Σ é integrável *sse*

$$d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-m} = 0$$

para $i = 1, \ldots, n - m$.

6. Se Σ é uma distribuição C^∞, a sua *distribuição ortogonal* é a distribuição

$$\Sigma^\perp = \bigcup_{p \in Q} \Sigma_p^\perp \subset TQ.$$

Deste modo Σ define duas projecções ortogonais $^\top : TQ \to \Sigma$ e $^\perp : TQ \to \Sigma^\perp$. Designamos por F_Σ o conjunto das forças exteriores $\mathcal{F}$ em Q tais que

$$\mathcal{F}(v_p) = \mathcal{F}\left(v_p^\top\right)$$

para todo o $v_p \in TQ$.

7. Uma *força de reacção* num sistema mecânico com restrições $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathcal{F}, \Sigma)$ é uma força $\mathcal{R} \in F_\Sigma$ tal que as soluções da *Lei de Newton generalizada*

$$\mu\left(\frac{D\dot{q}}{dt}\right) = (\mathcal{F} + \mathcal{R})(\dot{q})$$

com condição inicial em Σ são compatíveis com Σ. Diz-se que a força de reacção é *perfeita*, ou que satisfaz o *princípio de D'Alembert*, se

$$\mu^{-1}\mathcal{R}(v_p) \in \Sigma_p^\perp$$

para todo o $v_p \in T_pQ, p \in Q$.

8. Dado um sistema mecânico com restrições $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathcal{F}, \Sigma)$ existe uma única força de reacção $\mathcal{R} \in F_\Sigma$ que satisfaz o princípio de D'Alembert.
9. A *segunda forma fundamental* da distribuição Σ é a aplicação $B : TQ \times \Sigma \to \Sigma^\perp$ definida por
$$B(v_p, w_p) = (\nabla_X Y)^\perp$$
onde $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$ satisfazem $Y \in \Sigma, X(p) = v_p, Y(p) = w_p$. Se $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ é um referencial local tal que $\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ é uma base para Σ e $\{Z_{m+1}, \ldots, Z_n\}$ é uma base para $\Sigma^\perp$, então
$$(\nabla_X Y)^\perp = \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k X^i Y^j Z_k$$
onde
$$\nabla_{Z_i} Z_j = \Gamma_{ij}^k Z_k.$$
Portanto B só depende de $X(p), Y(p)$ e é bilinear. Note-se que a restição de B a $\Sigma \times \Sigma$ só é simétrica se Σ for integrável, uma vez que
$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \Leftrightarrow \nabla_{Z_i} Z_j = \nabla_{Z_i} Z_j \Leftrightarrow [Z_i, Z_j] = 0.$$
10. Se num sistema mecânico com restrições conservativo $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU, \Sigma)$ a força de reacção satisfaz o princípio de D'Alembert, então a energia mecânica $E_m = K + U$ é constante ao longo de qualquer movimento com condição inicial em Σ.

V. Mecânica Lagrangeana

1. Um *Lagrangeano* é uma função C^∞ $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $q : \mathbb{R} \to Q$ é um caminho C^∞ e $a < b \in \mathbb{R}$, a *acção* de $q(t)$ em $[a, b]$ correspondente ao Lagrangeano L é o número real
$$S = \int_a^b L(\dot{q}(t), t) dt$$
(note-se que $\dot{q}(t) \in T_{q(t)}Q$). Uma *variação* de $q(t)$ em $[a, b]$ é uma função C^∞ $\gamma : \mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to Q$ $(\varepsilon > 0)$ tal que
$$\gamma(t, 0) = q(t)$$
para todo o $t \in \mathbb{R}$ e
$$\gamma(a, \alpha) = q(a)$$
$$\gamma(b, \alpha) = q(b)$$
para todo o $\alpha \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. A uma variação de $q(t)$ corresponde a função $S :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ dada por
$$S(\alpha) = \int_a^b L(\dot{\gamma}(t, \alpha), t) dt$$
(onde $\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \gamma_* \frac{\partial}{\partial t}$). O caminho $q(t)$ diz-se um *ponto crítico* da acção correspondente ao Lagrangeano L no intervalo $[a, b]$ se
$$\frac{dS}{d\alpha}(0) = 0$$
para qualquer variação γ.

2. O caminho $q : \mathbb{R} \to Q$ é um ponto crítico da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no intervalo $[a,b]$ *sse* satisfaz as *equações de Euler-Lagrange*
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$
para todo o $t \in [a,b]$, onde $(q^1, \dots, q^n)$ são coordenadas locais em Q nalguma vizinhança de algum ponto de $q([a,b]) \subset Q$.
3. Os movimentos de um sistema mecânico conservativo $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, -dU)$ são os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L = T - U$ em qualquer intervalo.
4. As geodésicas de uma variedade pseudo-Riemanniana $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ são os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \to \mathbb{R}$ dado por
$$L(v_p) = \frac{1}{2}\langle v_p, v_p\rangle = K(v_p)$$
em qualquer intervalo
5. As geodésicas *não nulas* de uma variedade pseudo-Riemanniana $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ são, a menos de reparametrização, os pontos críticos do comprimento, i.e., os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \to \mathbb{R}$ dado por
$$L(v_p) = |\langle v_p, v_p\rangle|^{\frac{1}{2}}$$
em qualquer intervalo.
6. Se o caminho $q : \mathbb{R} \to Q$ satisfaz $\langle \dot{q}(t), \dot{q}(t)\rangle \neq 0$ para todo o $t \in [a,b]$ e o comprimento
$$S = \int_a^b |\langle \dot{q}(t), \dot{q}(t)\rangle|^{\frac{1}{2}} dt$$
de $q(t)$ entre $q(a)$ e $q(b)$ é $\leq$ (ou $\geq$) que o comprimento de qualquer outro caminho entre os mesmos pontos então $q|_{[a,b]}$ é um arco de geodésica (a menos de reparametrização).
7. O caminho $q : \mathbb{R} \to Q$ é um ponto crítico da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no intervalo $[a,b]$ restrita aos caminhos que satisfazem a restrição global (*isoperimétrica*)
$$\int_a^b F(\dot{q}(t), t) dt = 0$$
e a restrição local (*dinâmica*)
$$f(\dot{q}(t), t) = 0$$
para todo o $t \in [a,b]$ ($F, f : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞) *sse* existem $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ (ditos os *multiplicadores de Lagrange*) tais que $q(t)$ satisfaz as equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano $L + \lambda F + \mu(t) f$.
8. As soluções das equações de Euler-Lagrange com $L = K - U$ e restrição holónoma dependente do tempo (dada em coordenadas locais $(q^1, \dots, q^n)$ por $f(q^1, \dots, q^n, t) = 0$) são movimentos do sistema mecânico que satisfazem o princípio de D'Alembert.
9. As soluções das equações de Euler-Lagrange com $L = K - U$ e restrição linear nas velocidades (dada por $\ker \omega$ para alguma 1-forma ω) satisfazem o princípio de D'Alembert *sse* a distribuição $\ker \omega$ for integrável (i.e., se a restrição for holónoma). Caso contrário obtém-se a chamada *mecânica vakonómica* (de **v***ariational* **a***xiomatic* **k***ind*).

10. Se $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é uma variedade Riemanniana, $\omega \in \Omega^1(Q)$ e $U \in C^\infty(Q)$, os pontos críticos da acção correspondente ao Lagrangeano $L : TQ \to \mathbb{R}$ dado por
$$L(v_p) = \frac{1}{2}\langle v_p, v_p\rangle + \omega(v_p) - U$$
são os movimentos do sistema mecânico $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathcal{F})$, onde
$$\mathcal{F}(v_p) = -dU - v_p \lrcorner d\omega.$$
Este sistema mecânico diz-se *conservativo com termo magnético*, já que a energia mecânica $E_m = K + U$ é conservada ao longo dos seus movimentos.

VI. Mecânica Hamiltoniana

1. Escrevemos
$$TQ \times T^*Q \equiv TQ \times_Q T^*Q \equiv \bigcup_{p\in Q} T_pQ \times T_p^*Q.$$
Dado um Lagrangeano $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos a função $\tilde{H} : TQ \times T^*Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ através de
$$\tilde{H}(v_p, \omega_p, t) = \omega_p(v_p) - L(v_p, t).$$
Os pontos críticos de $\tilde{H}|_{\{\omega_p\}\times T_pQ\times\{t\}} : T_pQ \to \mathbb{R}$ formam uma subvariedade de $TQ \times T^*Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é o gráfico de uma função de domínio $TQ \times \mathbb{R}$; se esta variedade for também o gráfico de uma função de domínio $T^*Q \times \mathbb{R}$, o Lagrangeano diz-se *hiper-regular*.
2. Dadas coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n)$ em Q, introduzimos as correspondentes coordenadas locais induzidas em TQ e T^*Q:
$$(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n) \mapsto \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i};$$
$$(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) \mapsto p_i dq^i.$$
3. Um Lagrangeano hiper-regular $L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define um difeomorfismo que preserva fibras entre $TQ \times \mathbb{R}$ e $T^*Q \times \mathbb{R}$, dado localmente por $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ (dita a *transformação de Legendre*), e uma função C^∞ $H : T^*Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada localmente por $H = p_i\dot{q}^i - L$ (dita o *Hamiltoniano*), tais que a transformação de Legendre leva soluções das equações de Euler-Lagrange (definidas em $TQ \times \mathbb{R}$) em soluções das *equações de Hamilton* (definidas em $T^*Q \times \mathbb{R}$), dadas localmente por
$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$
4. Se $\pi : T^*Q \to Q$ é a projecção canónica, definimos a *1-forma canónica* (ou *1-forma tautológica*, ou *potencial simpléctico canónico*) $\theta \in \Omega^1(T^*Q)$ através de
$$\theta(\alpha_p) = \pi^*\alpha_p$$
para todo o $\alpha_p \in T^*Q$, e a *forma simpléctica canónica* $\omega \in \Omega^2(T^*Q)$ como sendo $\omega = d\theta$. Em coordenadas locais,
$$\theta = p_i dq^i;$$
$$\omega = dp_i \wedge dq^i.$$

5. Se $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$, as equações de Hamilton definem um fluxo cujo correspondente campo vectorial satisfaz
$$X_H \rfloor \omega = -dH.$$
Em particular, $X_H \cdot H = 0$, i.e., o Hamiltoniano mantém-se constante ao longo das soluções das equações de Hamilton (ou equivalentemente ao longo das soluções das equações de Euler-Lagrange).
6. Uma *variedade simpléctica* é um par (M, ω), onde M é uma variedade diferenciável e $\omega \in \Omega^2(M)$ é *fechada* ($d\omega = 0$) e *não degenerada* ($v_p \rfloor \omega = 0$ para todo o $v_p \in T_pM$ implica $v_p = 0$).
7. Se Q é uma veriedade diferenciável de dimensão n então $(T^*Q, \omega = d\theta)$ é uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ (θ é a 1-forma canónica).
8. Se (M, ω) é uma varidedade simpléctica então $\dim M$ é par.
9. Se (M, ω) é uma variedade simpléctica e $H \in C^\infty(M)$ então o *campo hamiltoniano* gerado por H é o (único) campo vectorial $X_H \in \mathcal{X}(M)$ tal que
$$X_H \rfloor \omega = -dH$$
($-X_H$ diz-se o *gradiente simpléctico* de H). O fluxo de X_H diz-se o *fluxo hamiltoniano* gerado por H.
10. H é constante ao longo do fluxo hamiltoniano gerado por H (i.e., $X_H \cdot H = 0$).
11. *Teorema de Darboux:* Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ e $p \in M$. Então existem coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ numa vizinhança de p (ditas *coordenadas de Darboux*) tais que nessa vizinhança
$$\omega = dp_i \wedge dq^i = dp_1 \wedge dq^1 + \ldots + dp_n \wedge dq^n.$$
12. Se (M, ω) é uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ então $\omega^n = \overbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}^{n \text{ vezes}}$ é uma forma de volume em M (e portanto M é orientável).
13. Um *simplectomorfismo* entre duas variedades simplécticas (M, ω) e (N, Ω) é um difeomorfismo $\Phi : M \to N$ tal que $\Phi^*\Omega = \omega$.
14. O fluxo hamiltoniano gerado por $H \in C^\infty(M)$ é um grupo a 1 parâmetro de simplectmorfismos.
15. *Teorema de Liouville:* O fluxo Hamiltoniano preserva o volume simpléctico: se $A \subset M$ é mensurável e $H \in C^\infty(M)$ então
$$\operatorname{vol}\left(\Phi_t^{X_H}(A)\right) = \operatorname{vol}(A),$$
onde $\Phi_t^{X_H}(p)$ designa o fluxo de $X_H \in \mathcal{X}(M)$ no instante $t \in \mathbb{R}$ com condição inicial $p \in M$, i.e., a solução do problema de Cauchy
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_t^{X_H}(p) = X_H \\ \Phi_0^{X_H}(p) = p \end{cases},$$
e o volume simpléctico é definido por
$$\operatorname{vol}(A) = \int_A \omega^n.$$

16. $X \in \mathcal{X}(M)$ diz-se *localmente hamiltoniano* se para todo o $p \in M$ existe uma vizinhança $U \ni p$ e $H \in C^\infty(M)$ tais que tais que $X \rfloor \omega = -dH$ em U.
17. $X \in \mathcal{X}(M)$ é localmente hamiltoniano *sse* Φ_t^X é um grupo a 1 parâmetro de simplectomorfismos.
18. Se $F, G \in C^\infty(M)$, o seu *parêntesis de Poisson* é $\{F, G\} = X_F(G) = dG(X_F)$.
19. $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ é uma *álgebra de Lie*, i.e., têm lugar as seguintes propriedades:
    (i) $\{F, G\} = -\{G, F\}$ (*anti-simetria*);
    (ii) $\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha\{F, H\} + \beta\{F, H\}$ (*bilinearidade*);
    (iii) $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$ (*identidade de Jacobi*),

    para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $F, G, H \in C^\infty(M)$. Além disso, o parêntesis de Poisson satisfaz também

    (iv) $\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$ (*identidade de Leibniz*),

    para todo o $F, G, H \in C^\infty(M)$.
20. $C^\infty(M) \ni H \mapsto X_H \in \mathcal{X}(M)$ é um *homomorfismo de álgebras de Lie* entre $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ e $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$, i.e.,
    (i) $X_{\alpha F + \beta G} = \alpha X_F + \beta X_G$;
    (ii) $X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G]$,

    para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $F, G, H \in C^\infty(M)$. O núcleo deste homomorfismo são as funções constantes, e a imagem são os campos hamiltonianos (que em particular formam uma subálgebra de Lie de $\mathcal{X}(M)$).
21. Uma *variedade de Poisson* é um par $(M, \{\cdot, \cdot\})$, onde M é uma variedade diferenciável e $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ satifaz
    (i) $\{F, G\} = -\{G, F\}$ (*anti-simetria*);
    (ii) $\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha\{F, H\} + \beta\{F, H\}$ (*bilinearidade*);
    (iii) $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$ (*identidade de Jacobi*);
    (iv) $\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$ (*identidade de Leibniz*),

    para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $F, G, H \in C^\infty(M)$.
22. Se $(M, \{\cdot, \cdot\})$ é uma variedade de Poisson e $H \in C^\infty(M)$, o *campo hamiltoniano* gerado por H é o campo X_H tal que $X_H(F) = \{H, F\}$ para todo o $F \in C^\infty(M)$.
23. Qualquer variedade simpléctica (M, ω) é naturalmente uma variedade de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$; os campos hamiltonianos definidos pelas duas estruturas coincidem.
24. Se (M, ω) é uma variedade simpléctica de dimensão $2n$, o sistema de coordenadas locais $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ é um sistema de coordenadas de Darboux *sse*

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0;$$
$$\{p_i, q^j\} = \delta_{ij}$$

    $(i, j = 1, \ldots, n)$.

VII. Sistemas Completamente Integráveis

1. Dada uma variedade simpléctica (M, ω) de dimensão $2n$, definimos o *Hamiltoniano* como uma função fixa $H \in C^\infty(M)$ fixa cujo fluxo hamiltoniano desejamos estudar.

2. $F \in C^\infty(M)$ diz-se um *primeiro integral* se $\{H, F\}$=0.
3. Se $F, G \in C^\infty(M)$ são primeiros integrais, então $\{F, G\}$ é ainda um primeiro integral.
4. $F_1, \ldots, F_m \in C^\infty(M)$ dizem-se
   (i) *independentes* se $\{dF_1, \ldots, dF_m\}$ são covectores linearmente independentes em cada ponto de M;
   (ii) *em involução* se $\{F_i, F_j\} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, m)$.
5. Se $F_1, \ldots, F_m \in C^\infty(M)$ são independentes e estão em involução então $m \leq n$.
6. H diz-se *completamente integrável* se existem n primeiros integrais $F_1, \ldots, F_n$ independentes e em involução.
7. Se H é completamente integrável, o conjunto

$$M_{\mathbf{f}} = \{p \in M : F_1(p) = f_1, \ldots, F_n(p) = f_n\} \neq \varnothing \quad (\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n)$$

   é uma subvariedade de M de dimensão n, invariante para o fluxo hamiltoniano de H, na qual se encontra definida uma acção de $\mathbb{R}^n$ localmente livre e transitiva em cada componente conexa.
8. Dado $p \in M_{\mathbf{f}}$, o *subgrupo de isotropia* de p é

$$\Gamma = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : \Phi_{\mathbf{t}}(p) = p\} \subset \mathbb{R}^n$$

   (onde $\Phi : \mathbb{R}^n \times M_{\mathbf{f}} \to M_{\mathbf{f}}$ designa a acção de $\mathbb{R}^n$ em $M_{\mathbf{f}}$).
9. O subgrupo de isotropia de p é um subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$ que não depende da escolha de p em cada componente conexa $M_{\mathbf{f}}^p$ de $M_{\mathbf{f}}$.
10. Seja Γ um subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$. Então existem $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vectores linearmente independentes $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ tais que $\Gamma = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.
11. $M_{\mathbf{f}}^p$ é difeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, onde k é o número de geradores do subgrupo de isotropia de p. Em particular, se $M_{\mathbf{f}}^p$ é compacta, então é difeomorfa ao toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. (Assumiremos daqui em diante que este é de facto o caso).
12. *Teorema de Arnold-Liouville:* Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ e $H \in C^\infty(M)$ completamente integrável com $F_1, \ldots, F_n \in C^\infty(M)$ primeiros integrais independentes em involução. Se as intersecções das superfícies de nível de $F_1, \ldots, F_n$ são compactas então são uniões finitas de toros n-dimensionais, invariantes para o fluxo de X_H. É possível escolher coordenadas de Darboux $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n, I_1, \ldots, I_n)$ numa vizinhança de qualquer um destes toros invariantes (*coordenadas acção-ângulo*) tais que $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \mod 2\pi$ são coordenadas naturais nos toros (*coordenadas ângulo*) e $(I_1, \ldots, I_n)$, dadas por

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \theta$$

   (onde γ_i é o gerador da homologia do toro associado a φ^i e θ é o potencial simpléctico, $d\theta = \omega$) são constantes em cada toro (*coordenadas acção*). Em particular nestas coordenadas $H = H(I_1, \ldots, I_n)$, e portanto

$$X_H = \omega^i(I_1, \ldots, I_n) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

com $\omega^i = \frac{\partial H}{\partial I_i}$; por outras palavras, o fluxo hamiltoniano de X_H nestas coordenadas é dado por

$$\Phi_t^{X_H}(\varphi^1, \ldots, \varphi^n, I_1, \ldots, I_n) = (\varphi^1 + \omega^1 t, \ldots, \varphi^n + \omega^n t, I_1, \ldots, I_n).$$

13. A construção das variáveis acção-ângulo num sistema completamente integrável só envolve operações "algébricas" (inversão de funções) e "quadraturas" (cálculo de integrais de funções conhecidas). Dado que uma vez encontradas as coordenadas acção-ângulo o cálculo do fluxo de X_H é trivial, diz-se que qualquer sistema completamente integrável é "solúvel por quadraturas" (daqui a origem da designação "completamente integrável").
14. Sejam $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \mod 2\pi$ coordenadas naturais no toro n-dimensional $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ e $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \ldots, \omega^n) \in \mathbb{R}^n$. O fluxo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ dado por

$$\Phi_t(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t$$

diz-se o *fluxo linear* no toro com frequências $\omega^1, \ldots, \omega^n$.
15. As frequências $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$ dizem-se *independentes* se são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, i.e., se $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \neq 0$ para todo o $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.
16. Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ contínua. A sua *média espacial* é o número real

$$\overline{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\boldsymbol{\varphi}) d^n \varphi$$

e a sua *média temporal* é a função

$$f^*(\boldsymbol{\varphi}) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t) dt$$

(definida no conjunto dos pontos $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^n$ para os quais o limite existe).
17. *Teorema Ergódico:* Se as frequências $\boldsymbol{\omega}$ são independentes, a média temporal existe para todo o $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^n$ e

$$f^*(\boldsymbol{\varphi}) = \overline{f}.$$

18. Se as frequências $\boldsymbol{\omega}$ são independentes então $\{\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t\}_{t \geq 0}$ é denso no toro para todo o $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^n$.
19. Se as frequências $\boldsymbol{\omega}$ são independentes e $n \geq 2$ então $\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t$ não é periódico.
20. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ e $H \in C^\infty(M)$ satisfazendo as condições do Teorema de Arnold-Liouville. H diz-se *não-degenerado* se

$$\det \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial I_j} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right) \neq 0$$

(i.e., se localmente as frequências $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ parametrizam os toros invariantes).
21. Se H é não-degenerado então
    (i) Quase todos os toros invariantes possuem frequências independentes;
    (ii) Se $n \geq 2$ então o conjunto dos toros invariantes que *não* possuem frequências independentes é denso no conjunto de todos os toros invariantes.

22. *Teorema KAM (Komolgorov-Arnold-Moser):* Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ e $H_0 \in C^\infty(M)$ completamente integrável e não-degenerado (portanto as frequências $(\omega^1, \ldots, \omega^n) = \left(\frac{\partial H_0}{\partial I_1}, \ldots, \frac{\partial H_0}{\partial I_n}\right)$ parametrizam os toros invariantes). Dados $H_1 \in C^\infty(M)$, $H = H_0 + \varepsilon H_1$ e $\nu > n - 1$, existe $\mu = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ tal que numa vizinhança de cada toro invariante de H_0 cujas frequências satisfazem

$$|\mathbf{k} \cdot \omega| > \mu \|\mathbf{k}\|^{-\nu}$$

para todo o $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ existe um toro invariante de H com as mesmas frequências. Em particular, a fracção dos toros invariantes destruidos pela perturbação é $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ (no sentido da medida de Lebesgue nas frequências).