Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 3 - 12 a 16 de Março de 2007

1. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

   a) $\cos(iz) = \cosh(z)$; b) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$;

   c) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$; d) $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh(2y)$;

   e) $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$; f) $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh(2z)$;

   g) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$; h) $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w$.

2. Calcule o valor principal (i.e., considerando o ramo principal da função $\log z$, ou seja, $\log z = \log|z| + i\theta$, com $\theta \in]-\pi, \pi]$) de:

   a) $\log(-e)$ b) $\log(-i)$ c) $\log(1-i)$ d) 2^{-i} e) i^{i} f) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$

3. Determine todas as soluções das seguintes equações:

   a) $e^z = e$ b) $e^z = -1$ d) $\log z = 1 + 2\pi i$ c) $e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0$ e) $\operatorname{sen}(z) = 10$

4. Estabeleça a seguinte fórmula

$$\arctan z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right).$$

   Sugestão: Use a fórmula de Euler na relação $\tan z = w$ e determine e^z em função de z.

5. Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa e indique os pontos de $\mathbb{C}$ onde são contínuas:

   a) $\operatorname{Re}(z)$ b) $\overline{z}$ c) $|z|$ d) z^2 e) $z|z|$ f) $e^{\cos z}$ g) $\log(z+2)$

   h) $\dfrac{1}{(3-5z)^3}$ i) $\dfrac{1+z}{(\operatorname{sen} z)^2}$

6. Determine o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada:

   a) $xy - ix$ b) $x^2 - y^2 + 2ixy$ c) $x^2 - y + i(x - y^2)$ d) $z^2 - 3z$ e) $\operatorname{Im}(z^2)$

   f) $z - \bar{z}$ g) $z(e^{iz} - e^{-iz})$ h) $\overline{e^z}$ i) $ze^{\bar{z}}$ j) $\dfrac{1}{z} - \bar{z}$

7. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$.

   (a) Estude a diferenciabilidade de f.

   (b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é diferenciável.

8. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (|z|^2 - 2)\overline{z}$.

   a) Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde f é diferenciável, bem como o seu domínio de analiticidade.

   b) Mostre que f transforma circunferências centradas na origem e de raio r em circunferências centradas na origem de raio r'. Para que valores de r se tem $r = r'$?

9. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em $(x,y) = (0,0)$.

   (b) Verifique, utilizando a definição, que $f'(0)$ não existe.

   (c) Porquê que isto não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann?

10. Mostre que $f(z) = \sqrt{|xy|}$ possui, na origem, derivadas parciais que verificam as equações de Cauchy-Riemann, mas que f não possui derivada (no sentido complexo) nesse ponto.

11. Seja f uma função analítica num aberto conexo D, que satisfaz $f'(z) = 0$ para todo o $z \in D$. Mostre que, então, f é constante em D (Sugestão: mostre que tanto a parte real como a parte imaginária de f são constantes, como funções das variáveis x, y).

12. Mostre que se f e $\overline{f}$ são ambas inteiras, então f é constante.

13. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e defina $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$. Se f é uma função analítica em A mostre que $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é uma função analítica em A^*.