Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 4 - 19 a 23 de Março de 2007

1. Deduza as equações de Cauchy-Riemann, em coordenadas polares, da seguinte forma. Seja $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida num conjunto aberto A, tal que $f(z) = u(z) + iv(z)$, para $z \in A$. Seja $T : \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ a aplicação da mudança de coordenadas polares dada por $T(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = \rho\, e^{i\theta}$ (Naturalmente, qualquer outro intervalo de comprimento 2π, para domínio dos ângulos θ, serviria igualmente). Defina $\tilde{u}(\rho, \theta) = u \circ T(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = u(\rho\, e^{i\theta})$ e $\tilde{v}(\rho, \theta) = v \circ T(\rho, \theta) = v(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = v(\rho\, e^{i\theta})$.

   a) Mostre que T, como aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, é continuamente diferenciável e tem uma inversa, também continuamente diferenciável.

   b) Usando o teorema da diferenciação de funções compostas, em $\mathbb{R}^2$, mostre que f é analítica no conjunto $A \setminus \{x + iy : x \geq 0\,, y = 0\}$ se e só se $(\tilde{u}, \tilde{v}) : T^{-1}(A) \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann polares, em $T^{-1}(A)$

   $$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}.$$

   c) Determine a fórmula para $f'(z) = f'(\rho\, e^{i\theta})$ em coordenadas polares, em função das derivadas parciais de $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ em ordem a ρ e θ.

   d) Sabendo que a função $\log z$ é dada em coordenadas polares por $\log z = \log(\rho\, e^{i\theta}) = \log \rho + i\theta$ verifique que é diferenciável e determine a sua derivada.

2. Utilize as equações de Cauchy-Riemann na forma polar (problema anterior) para verificar que a seguinte função é analítica em todo o seu domínio

   $$h(z) = 2 \log \frac{\rho}{2} + 2i\theta,$$

   com $z = \rho\, e^{i\theta}$, $\rho > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$. Calcule $h'(z)$.

3. Sabendo que, para $z = x + iy$, se tem $x = (z + \bar{z})/2$ e $y = (z - \bar{z})/2i$, dada uma função complexa $f(x, y) : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, diferenciável no sentido de $\mathbb{R}^2$, podemos considerá-la como uma função de z e $\bar{z}$.

   a) Utilize o teorema da diferenciação da função composta para mostrar que

   $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

b) Mostre que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann se e só se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Nota: este exercício mostra que as funções holomorfas são, neste sentido, aquelas que não dependem de $\bar{z}$.

4. Determine, pela definição, os valores dos seguintes integrais:

   a) $\int_C |z|\, dz$ em que C é a semicircunferência centrada na origem, percorrida em sentido directo, unindo $-2i$ a $2i$.

   b) $\int_C z \cos z^2 dz$ em que C é o segmento de recta unindo 0 a πi.

5. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

   a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} e^z dz$, com $k = 1, 2$.

   b) Calcule $\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$ com $k = 1, 2$.

   c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

6. Seja
$$f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \quad , \quad |z| > 0 \ \text{ e } \ 0 < \arg z < 2\pi$$
Calcule
$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz$$
onde a curva é percorrida no sentido positivo.

7. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \le t \le \pi$. Mostre que se $R > 2$, então
$$\Big| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \Big| \le \pi \frac{R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

8. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - \pi i| + |z - 2\pi i| = \frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

   (a) $\oint_\Gamma z^3 \cosh z\, dz$

   (b) $\oint_\Gamma e^{\cos^3 z}\, dz$

   (c) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}}\, dz$

   (d) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{1}{z^2 + \pi^2}\, dz.$

   (e) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz$

   (f) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2(z - 2\pi i)^3}$

(g) $\displaystyle\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z - i\pi)^{11}}\, dz$.

9. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right) .$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, dz,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.