Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

Semana 5 - 26 a 30 de Março de 2007

1. Calcule o seguinte integral
$$\oint_{|z+i|=2} \frac{z^3+e^z}{z^2+z-2}\, dz,$$
em que a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

2. Determine todos os possíveis valores do integral
$$\oint_C \frac{z\cos z}{z^2+1}\, dz,$$
onde C é uma qualquer curva de Jordan, seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$.

3. Prove que não existe nenhuma função $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ analítica, tal que $f'(z)=1/z$ para todo o $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. O facto de que $(\log z)'=1/z$ contradiz este resultado?

4. (Teorema de Liouville) Mostre que se $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ é uma função inteira e limitada, então é constante. **Sugestão:** Utilize a fórmula integral de Cauchy para concluir que $f'(z)=0$.

5. Poderá existir uma função analítica em $\mathbb{C}$ cuja parte real seja $u(x,y)=e^{-y}x+e^{x}y$?

6. Determine funções harmónicas conjugadas para as seguintes funções:
   a) $u(x,y)=x^2+xy-y^2$;
   b) $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$;
   c) $u(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\,\mathrm{sen}\,x)$.

7. Considere a seguinte função $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:
$$u(x,y)=x^3+y^3-3xy(x+y)$$
   (a) Mostre que u é uma função harmónica.
   (b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0,0)=0$.
   (c) Calcule
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz \qquad \text{e} \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z^3}\, dz$$
   onde $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ e C é a curva $\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}$ percorrida no sentido positivo.

8. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = \operatorname{Re}[g(x+iy)]$ e $v(x,y) = \operatorname{Im}[g(x+iy)]$.

   (a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

   (b) Mostre que u é uma função harmónica.

   (c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re}(f) = u$.

9. Calcule a região de convergência das seguintes séries de potências:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\right)^n}{n^4+1}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z+1-i)^n$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+1)^n$

10. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \begin{cases} 5^n & \text{se } n \text{ par} \\ (-2)^n & \text{se } n \text{ impar} \end{cases} .$$

   Sabendo que esta é a série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ de uma função f, analítica em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

11. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos seguintes pontos:

   a) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.

   b) e^{2z} , em torno de $z = i\pi$.

   c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.

   d) Valor principal de $\log z$, em torno de $z = i - 1$.

12. Considere a função $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}$. Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potênciaas de $(z-2)$.

13. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira, tal que existem $M, R > 0$ e um inteiro $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|f(z)| \leq M|z|^n$, para $|z| > R$. Mostre que então f é um polinómio de grau $\leq n$. **Obs:** Este resultado mostra que funções inteiras, não polinomiais, têm necessariamente de crescer em módulo mais rapidamente que qualquer polinómio, quando $z \to \infty$. Como se justifica esta afirmação, por exemplo, no caso da função inteira (e não polinomial) $\cos z$?

14. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

   a) $\frac{1}{z-1}$, $|z| > 1$.

   b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z\right)$, $|z| > 0$.

   c) $\frac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z-i| > 1$.

   d) $(3z^2 - 1) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3}\right)$, $|z| > 0$.