Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

Semana 6 - 2 a 13 de Abril de 2007

1. Para que valores de z é a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n$ convergente?

2. A **função ζ de Riemann** é definida pela fórmula:

$$\zeta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^z}.$$

Mostre que esta série é absolutamente convergente para $\mathrm{Re}(z)>1$.

3. Estude as seguintes séries quanto ao tipo de convergência (absoluta, simples ou divergência):

$$\textbf{(a)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\log n}\qquad \textbf{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$$

4. Calcule a região de convergência das seguintes séries de potências:

$$\textbf{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-i\sqrt{2}\right)^n}{n^4+1}\qquad \textbf{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(n!)^2}\qquad \textbf{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}(z+1-i)^n\qquad \textbf{(d)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(z+1)^n$$

$$\textbf{(e)}\ \sum_{n=0}^{\infty}n^n z^{n^2}$$

5. Se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ tem raio de convergência R, quais os raios de convergência das séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n^5 z^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{2n+3}$?

6. Determine a região de convergência e calcule a soma das seguintes séries de potências:

(a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}(\alpha z)^{3n},\qquad \alpha\in\mathbb{C}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nz^{2n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$

7. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \begin{cases} 5^n & \text{se } \ n \text{ par} \\ (-2)^n & \text{se } \ n \text{ impar} \end{cases} .$$

Sabendo que esta é a série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ de uma função f, analítica em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

8. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos indicados, bem como as respectivas regiões de convergência:

   a) $\frac{1}{1-z}$, em torno de $z = 3$.
   b) $e^{5z} + \frac{3}{3+5z}$, em torno de $z = 2$.
   c) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.
   d) e^{2z} , em torno de $z = i\pi$.
   e) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.
   f) Valor principal de $\log z$, em torno de $z = i - 1$.

9. Considere a função $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}$. Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $(z-2)$.

10. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira, tal que existem $M, R > 0$ e um inteiro $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|f(z)| \leq M|z|^n$, para $|z| > R$. Mostre que então f é um polinómio de grau $\leq n$. **Obs:** Este resultado mostra que funções inteiras, não polinomiais, têm necessariamente de crescer em módulo mais rapidamente que qualquer polinómio, quando $z \to \infty$. Como se justifica esta afirmação, por exemplo, no caso da função inteira (e não polinomial) $\cos z$?

11. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

   a) $\frac{1}{z-1}$, $|z| > 1$.
   b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z \right)$, $|z| > 0$.
   c) $\frac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z - i| > 1$.
   d) $(3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3} \right)$, $|z| > 0$.

12. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2-1)^2}$ nas seguintes regiões:

   (a) $0 < |z - 1| < 2$.
   (b) $2 < |z - 1|$.

e calcule os seguintes integrais:

(a) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$.

(b) $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$

13. Seja $P(z)$ um polinómio e γ uma curva simples e fechada em $\mathbb{C}$, percorrida uma vez no sentido directo, e que não intersecta o conjunto dos zeros de $P(z)$. Mostre que o valor de
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$
é igual ao número de zeros (contando multiplicidades) de $P(z)$ que pertencem ao interior da curva γ.

14. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções, e calcule os resíduos correspondentes.

   a) $f_1(z) = \frac{1-\cos z}{z-\pi}$

   b) $f_2(z) = \frac{z}{(z^2+2)^2}$

   c) $f_3(z) = \frac{1}{z^7(1-z^2)}$

   d) $f_4(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4(1-z^2)}$

   e) $f_5(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}$

15. Considere a função
$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{z}}.$$
Mostre que $g(z)$ não possui uma singularidade isolada em $z = 0$.

16. Seja f uma função analítica no ponto z_0. Mostre que a função $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ possui em z_0 uma singularidade removível, caso $f(z_0) = 0$, e um pólo simples de resíduo $f(z_0)$, em caso contrário.

17. Suponha que $f(z) = h(z)/g(z)$ tem um pólo de ordem 1 em $z = z_0$, sendo h e g analíticas em z_0 e $h(z_0) \neq 0$. Mostre que
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

18. Considere as curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2\pi i| = 1\}$, percorridas uma vez no sentido directo. Calcule o valor dos integrais
$$\oint_{\gamma_k} g(z) dz,$$
para cada uma das seguintes funções complexas:
$$\text{(i)}\quad g(z) = \frac{1}{e^z - 1}\,, \qquad \text{(ii)}\quad g(z) = z^2 \operatorname{sen}(z^{-1})\,, \qquad \text{(iii)}\quad g(z) = \frac{z-2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2}.$$